

## 第8回 余因子と行列式の展開

本日の講義の目標

### 目標 8

- ① 行列の小行列式と余因子について理解する.
- ② 行列式の余因子展開について理解する.

# 小行列式と余因子

$A$  を  $n$  次 (正方) 行列とする.

## 定義 8.1

$A$  から第  $i$  行と第  $j$  列を取り除いて得られる  $(n-1)$  次の行列  $A_{ij}$  の行列式  $|A_{ij}|$  を  $A$  の  $(i, j)$  **小行列式** とよび, 記号  $D_{ij}$  で表す. また,

$$\Delta_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

を  $A$  の  $(i, j)$  **余因子** という.

## 例 8.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ のとき, } D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} D_{23} = -(-2) = 2. \text{ 同様に } D_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 3 \times 4 = -10.$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} D_{12} = -(-10) = 10.$$

## 小行列式と余因子 2

### 小行列式と余因子

$$A \xrightarrow{i \text{ 行と } j \text{ 列を取り除く}} A_{ij} \xrightarrow{\text{行列式をとる}} D_{ij} \xrightarrow{\times(-1)^{i+j}} \Delta_{ij}$$

(小行列式) (余因子)

余因子の定義における  $(-1)^{i+j}$  は  $i+j$  の偶奇により  $\pm 1$  のいずれかの値をとる。

### 注意 8.3 (余因子の符号)

$(i, j)$  成分の位置に  $(-1)^{i+j}$  の符号を書くと,

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} \quad \dots$$

のようになる (+ と - がチェック模様のように交互に現れる)。

### 例題 8.4

行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  の  $(i, j)$  余因子  $\Delta_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq 3$ ) を計算し、それを  $(i, j)$  成分とする行列  $B = (\Delta_{ij})$  を書け.

解答)

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 & \Delta_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 & \Delta_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \\ \Delta_{21} &= -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 & \Delta_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 & \Delta_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \\ \Delta_{31} &= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 & \Delta_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 & \Delta_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

よって,

$$B = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 \\ 10 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

# 行列式の余因子展開

$A$  を  $n$  次行列とし、その  $(i, j)$  成分を  $a_{ij}$  で表す ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ).

## 定理 8.5

$A$  の  $(i, j)$  余因子を  $\Delta_{ij}$  とする. このとき,  $A$  の行列式  $|A|$  に対し,

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

が成り立ち, この式を  $|A|$  の **第  $i$  行に関する展開** という. また,

$$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$

が成り立ち, 同様に  $|A|$  の **第  $j$  列に関する展開** という.

すなわち,  $A$  の第  $i$  行 (第  $j$  列) の成分に第  $i$  行 (第  $j$  列) の余因子をかけて足し合わせると,  $A$  の行列式  $|A|$  の値に等しくなることを意味している (命題 7.4 から行に関する性質は列でも成立する).

## 例 8.6

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

とする.  $|A|$  を 1 行で展開すると,

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot \Delta_{11} + 3 \cdot \Delta_{12} + (-1) \cdot \Delta_{13} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3 - 9 + 0 = -12. \end{aligned}$$

$|A|$  を 2 列で展開すると,

$$\begin{aligned} |A| &= 3 \cdot \Delta_{12} + (-2) \cdot \Delta_{22} + 1 \cdot \Delta_{32} \\ &= 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -9 + 0 - 3 = -12. \end{aligned}$$

# 行列式の余因子展開(つづき)

## 注意 8.7

行列式の展開は任意の行(列)で行なって良い. 勝手な行(列)をひとつ選んで展開すれば, 行列式の値を計算できる.

## 例 8.8

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

- (むだな計算)

$$|A| \xrightarrow{\text{①で展開}} 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 12 = 32.$$

- (効率的な計算)

$$|A| \xrightarrow{\text{③で展開}} 4\Delta_{32} = 4 \cdot \left( - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = 4 \cdot 8 = 32.$$

命題 7.7 は余因子展開の特別な場合と捉えることができる。

### 命題 8.9 (命題 7.7 再掲)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

すなわち

$$\begin{vmatrix} a & * \\ \mathbf{0} & A' \end{vmatrix} = a|A'| = \begin{vmatrix} a & \mathbf{0} \\ * & A' \end{vmatrix}$$

が成立する。実際、ここで  $|A'|$  は  $A$  の  $(1, 1)$  余因子に等しい。



## “行列式の基本変形” との合わせ技

行列式の余因子展開は“**行列式の基本変形**” (命題 7.3) と組み合わせて用いると、計算が“楽ちん”である.

### 例 8.10

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{①}+\text{③}} \begin{vmatrix} 5 & -5 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{②で展開}} 1 \cdot \Delta_{23} =$$

$$1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & -5 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{③}-\text{②}} - \begin{vmatrix} 5 & -5 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{③で展開}} -2\Delta_{31} =$$

$$-2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2(-5 \times 2 - 9 \times 3) = 74.$$

# 行列式の計算のまとめ

## 計算のポイント

- ① 行列式の“基本変形”を用いて0を多く含む行(または列)をつくる.
- ② 余因子展開を用いて0を多く含む行(または列)において展開する.