第 3 回 連立方程式の一般解

本日の講義の目標

目標 3

1. 連立方程式の解をパラメータを用いて表す方法について理解する.
2. 連立方程式に解が存在しない場合の扱いについて理解する.

連立方程式とパラメータ

前回習った方法 (基本変形) を次の方程式に適用すると, 係数行列を単位行列まで変形できない.

例 3.1

連立方程式 $\begin{cases} x + 2y = 2 \cdots ① \\ 2x + 4y = 4 \cdots ② \end{cases} \quad \cdots (\heartsuit)$ の拡大係数行列 $\tilde{A}$ に対し,

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{②-2\times①} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

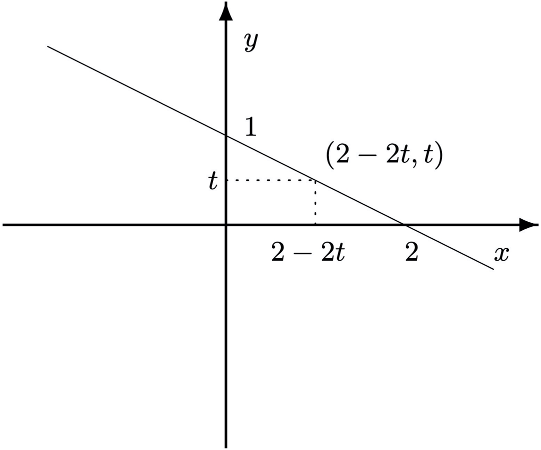
②は①を 2 倍した式に等しいので当然である. 方程式 ($\heartsuit$) は見かけ上2 本の式からなるが, 本質的には1 本の式 (①または②) で定義されている. このような場合はパラメータ t を用いて全ての解を表せる. 実際, $y = t$ とおくと①式により $x + 2t = 2$. これを x について解くと,

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t. \end{cases} \quad (t \text{ は任意})$$

と表せる. これが方程式 ($\heartsuit$) の解となる.

方程式の解の空間と幾何

方程式 (♡) の解は xy-平面における直線 $x + 2y = 2$ 上の点と一対一に対応する. "方程式を解く" ことは "全ての解を求める" ことなので, パラメータ t が必要になる理由がわかる.



連立方程式とパラメータ 2

例題 3.2

連立方程式 $\begin{cases} x+3y+5z=-1 \\ x+2y+6z=0 \\ 2x+3y+13z=1 \end{cases}$ を解け.

解答) 拡大係数行列を変形すると

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 13 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②-①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[③+3\times②]{①-3\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$z=t$ とおけば, 最後の行列の①と②により $x=2-8t$, $y=-1+t$. したがって,

$$\begin{cases} x=2-8t \\ y=-1+t \qquad (t\ \text{は任意}) \\ z=t \end{cases}$$

簡約行列

掃き出し法により連立方程式の解を求めるとき, 拡大係数行列を簡約行列まで変形する (**行列を簡約化する**) ことが重要である.

定義 3.3 (簡約行列)

次の条件を全て満たす行列を**簡約行列**という.

1. 零行があれば, 非零行よりも下に位置する.
2. 非零行の**主成分** (左から見て一番最初の零でない成分) は 1 に等しい.
3. 主成分は下の行ほど右に位置する.
4. 主成分を含む列において, 主成分以外の他の成分は全て 0 に等しい.

例 3.4 (簡約行列の例)

$$\begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & ① & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & ① & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & ① & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ① \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & ① & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

丸囲みの数字の 1 (①) が主成分である (わかりやすいように○で囲んだ).

簡約行列とパラメータの置き方

拡大係数行列を簡約化したのち, 主成分 (①) を含まない列の変数をパラメータに取ることにより, 連立方程式の (一般) 解を表すことができる.

例 3.5

連立方程式
$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
において, 主成分を含まない列にある変数 y と w をそれぞれパラメータ t_1 と t_2 に取る. この方程式の解は

$$\begin{cases} x = 5 - 2t_1 - 4t_2 \\ y = t_1 \\ z = 1 - 2t_2 \\ w = t_2. \end{cases} \qquad (\text{ただし } t_1, t_2 \text{ は任意})$$

と表せる.

解が存在しない方程式

拡大係数行列を簡約化したのち, 次のように矛盾する式が出る場合には方程式に **解は存在しない** (“**解なし**” という).

例 3.6

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \end{array}\right) \end{array}
\xrightarrow[\text{③}-2\times\text{①}]{\text{②}-\text{①}}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \end{array}
\xrightarrow[\text{③}-\times\text{②}]{\text{①}-\text{②}}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}
$$

最後の拡大係数行列において第 3 行の式 (③) は

$$0x + 0y + 0z = 1,$$

すなわち $0 = 1$ を要請する. したがって, この方程式の解は存在しない.

階段行列

掃き出し法により連立方程式の解を求めるとき, 拡大係数行列を (早い段階で) 階段行列まで変形することが肝要である. 階段行列は簡約行列の一般化である:

定義 3.7

次の条件を全て満たす行列を**階段行列**という.

1. 零行があれば, 非零行よりも下に位置する.
2. 主成分は下の行ほど右に位置する.
3. 主成分を含む列において, 主成分より下に位置する成分は全て 0 に等しい.

階段行列において, 非零行ベクトルの主成分は 1 とは限らず, 主成分を含む列において, 主成分の上に位置する成分は全て 0 とは限らない.

例 3.8 (階段行列の例)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

わかりやすいように主成分を○で囲った.

階段行列と連立方程式

拡大係数行列を階段行列になるまで変形すれば, 方程式の解の存在や解の形が明らかとなる.

例 3.9

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 8 \end{array}\right)
\xrightarrow[③-①]{②-2\times①}
\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③-2\times②}
\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

と階段行列に変形され, 唯一の解を持つことがわかる. 番号の大きい式から順番に用いると, ③より $3z = 9$. したがって $z = 3$. ②より $3y - 3 \times 3 = -3$. したがって $y = 2$. ①より $x - 2 + 6 = 5$. したがって $x = 1$.

階段行列まで変形した後は, 上記のように直接代入によって求めても良いが, 最後の行列を簡約行列になるまで変形して解を求めても良い.