線形代数 1

那須弘和

東海大学理学部情報数理学科

2020 年度春学期

はじめに...

テーマは

線形代数学入門

全体を通じての目標

1. 行列とその演算について理解する.
2. 連立一次方程式の解法について理解する.
3. 逆行列について理解する.
4. 行列式の意味と計算について理解する.

線形代数学とは...

- 線形空間と線形写像を中心とした理論を研究する数学 (**代数学**) の分野
- 数学において微分積分学とならび**基礎的な役割**
- **行列・行列式・連立一次方程式**に関する理論を含む
- 自然科学のみならず, 工学, 経済学など**幅広い応用**あり
  - 画像処理, CG
  - Google のサイト評価システム (PageRank)
  - 統計学 (多変量解析など)
  - 量子力学
  - ...

講義の受け方と成績評価, 担当教員紹介など

1. 講義の受け方
   1. 「スライド」または「動画」で, 講義回の基本事項について確認する.
   2. 教科書の講義回範囲をよく読む.
   3. 講義回の「理解度チェック」(書込み式) を解く (解答と答え合わせ).
   4. わからなければ教科書に戻る.
   5. 講義回の「演習問題」を解く.
   6. さらに余力があれば, 教科書の演習問題も解く.
2. 成績評価
   - 中間レポート (50 %) と期末レポート (50 %) により評価する.
3. 担当教員の紹介

氏名	那須弘和
所属	理学部情報数理学科
専門	代数幾何学

4. 教科書
   - 「入門線形代数」三宅敏恒著 培風館

講義スケジュール

- 第 1 回　行列とその演算
- 第 2 回　連立方程式と基本変形
- 第 3 回　連立方程式の一般解
- 第 4 回　掃き出し法と行列の階数
- 第 5 回　逆行列
- 第 6 回　行列式の導入
- 第 7 回　行列式の定義と性質
- 第 8 回　余因子展開
- 第 9 回　余因子行列と逆行列
- 第 10 回　行列式のまとめ

第 1 回 行列とその演算

本日の講義の目標

目標 1

1. 行列の定義について理解し, “行” や “列” などの用語を覚える.
2. 行列の演算 (和, スカラー倍, 積) について理解する.

行列の定義

定義 1.1

m,n を自然数とする. mn 個の数 (スカラー) a_{ij} $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ を以下のようにならべ () または [] でくくったものを m 行 n 列の**行列** (または $m \times n$ **行列**) という:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

この a_{ij} を A の (i,j) **成分**という. 行列の横のならび $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ を A の**行**といい, 上から i 番目の行を**第 i 行**という. また縦のならび $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を A の**列**といい, 左から j 番目の列を**第 j 列**という. A に対し, (m,n) を A の**型 (またはサイズ)** という.

行列の例と特別な行列

例 1.2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ は 2×3 行列 (2 行 3 列の行列) である．A の第 2 行は $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ であり，第 3 列は $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり，A の $(2,1)$ 成分は 4, $(1,3)$ 成分は 3 である．

行列を表すとき，通常 $A, B, C, \ldots$ などのアルファベットの大文字を用いる．文字は自由に選んで良いが，O と E は特別な行列に割り当てられる (cf. 定義 1.3).

定義 1.3

全ての成分が 0 に等しい行列 O を**零行列**という．$m = n$ を満たす行列 A を (n 次) **正方行列**という．正方行列のうち，**対角成分**が 1 で残りの成分が 0 の行列 E を**単位行列**という．

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

行列の演算

a_{ij} を (i,j) 成分とする $m\times n$ 行列 A を $A=(a_{ij})$ と表す. 例えば n 次正方行列 (a_{ij}) を $a_{ij}=1$ $(i=j)$ かつ $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$ により定めれば, (a_{ij}) は単位行列 E (定義 1.3) に等しい.

定義 1.4 (行列の和とスカラー倍)

サイズ $(=m\times n)$ の等しい行列 $A=(a_{ij})$ と $B=(b_{ij})$ に対し, 和 $A+B$ を

$$A+B=:\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij}+b_{ij})$$

により定義し, スカラー λ に対し λA を

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}=(\lambda a_{ij})$$

により定義する.

例 1.5

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ かつ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき,

$$2A + 3B = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

行列 A と行列 B の積は, A の列数と B の行数が等しいときにのみ定義される.

定義 1.6 (行列の積)

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $n \times l$ 行列 $B = (b_{jk})$ に対し, $m \times l$ 行列 $AB = (c_{ij})$ を

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

により定義する.

$$AB = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

AB の (i,j) 成分 c_{ij} は A の第 i 行 $\mathbf{a}_i$ と B の第 j 列の $\mathbf{b}_j$ の内積 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j$ に等しい.

例 1.7

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \times 0 + (-2) \times 1 & 1 \times 1 + (-2) \times (-1) & 1 \times 0 + (-2) \times 0 \\ 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \times 1 + 1 \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

B の列の数 (= 3) と A の行の数 (= 2) が異なるため, 積 BA は**定義されない**.

行列の演算も数の演算とよく似た性質をもつが, いくつかの “著しく” 異なる性質があるので注意する:

- 和, 差, 積が定義されるとは限らない (A, B の型に依存する). (cf. 例 1.7)
- 積 AB と BA がともに定義されたとしても, 一般には $AB \neq BA$ である.

例題 1.8

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ のとき, 積 AB と積 BA を計算せよ.

解答)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 16 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 26 & 4 \end{pmatrix}.$$

行列の演算の性質

結合律や分配律などの "数" の持つ演算の性質は行列でも成立する.

- $A+B=B+A$, $A+O=A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$　(和に関する結合律)
- $AE=EA=A$, $AO=O$, $OA=O$
- $(AB)C=A(BC)$　(積に関する結合律)
- $0A=O$, $1A=A$, $(ab)A=a(bA)$, $(aA)B=a(AB)$
- $a(A+B)=aA+aB$, $(a+b)A=aA+bA$,
- $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$　(分配律)

第 2 回 連立方程式と基本変形

本日の講義の目標

目標 2

1. 連立方程式の (拡大) 係数行列を用いた表し方について理解する.
2. 行列の (行) 基本変形について理解する.
3. 基本変形による連立方程式の解法 (唯一解の場合) について理解する.

連立方程式と (拡大) 係数行列

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ -3x + 5y = -1 \end{cases} \quad \cdots (\heartsuit) \quad や \quad \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 8y + 4z = 6 \\ 2x + 8y + z = 5 \end{cases} \quad \cdots (\clubsuit)$$

のような方程式を (一次) **連立方程式**という.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおくと $(\heartsuit)$ は式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ により表せる. 同様に

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

とおくと $(\clubsuit)$ も式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ により表せる. 一般に連立方程式は, 適当な行列 A と変数ベクトル $\mathbf{x}$, 方程式の右辺の数を成分とするベクトル $\mathbf{b}$ を用いて

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

と (一意に) 表せる.

連立方程式と拡大係数行列 2

定義 2.1

(($\heartsuit$) や ($\clubsuit$) のように) 連立方程式を $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表すとき, A を方程式の**係数行列**といい, A と $\mathbf{b}$ を $|$ により区切って並べた行列

$$\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$$

を方程式の**拡大係数行列**という. ($\tilde{A}$ の ˜ は “チルダ” と読む.)

($\heartsuit$) と ($\clubsuit$) の拡大係数行列はそれぞれ

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ -3 & 5 & -1 \end{array}\right) \quad \text{と} \quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

で与えられる.

連立方程式と拡大係数行列 3

例題 2.2

連立方程式 $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 2 \\ z - x = 3 \end{cases}$ の拡大係数行列 $\tilde{A}$ を求めよ.

解答)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

連立方程式と拡大係数行列 4

連立方程式

$$\begin{cases} x+2y=5 \cdots ① \\ 2x+3y=8 \cdots ② \end{cases}$$

を解く. ② から ① の 2 倍を引く (② + (−2) × ①) と,

$$\begin{cases} x+2y=5 \cdots ①' \\ -y=-2 \cdots ②' \end{cases}$$

となる. ②' を (−1) 倍する (②' × (−1)) と,

$$\begin{cases} x+2y=5 \cdots ①'' \\ y=2 \cdots ②'' \end{cases}$$

最後に ②'' から ①'' の 2 倍を引く (①'' + (−2) × ②'') と方程式の解を得る:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2. \end{cases}$$

連立方程式と拡大行列 5

連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と拡大係数行列 $\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$ は本質的に同じものを表すので, 係数行列 $\tilde{A}$ の変化を見る.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{②+(-2)\times①} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -y = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{②\times(-1)} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{①+(-2)\times②} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②+(-2)\times①} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①+(-2)\times②} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

連立方程式を解くためには, 係数行列が単位行列になるように "変形" を行えば良い!

行列の基本変形

行列の基本変形は, 拡大係数行列に限らず, 一般の行列に対し定義される.

定義 2.3 ((行) 基本変形)

行列の次の 3 つの変形を ***(行) 基本変形*** という:

1. 1 つの行に 0 でない数をかける. (例：②$\times(-1)$)
2. 1 つの行に他の行の何倍かを加える. (例：②$+(-2)\times$①)
3. 2 つの行を交換する. (例：①$\leftrightarrow$②)

基本変形は可逆的であり, 基本変形を行って得られる連立方程式は, 全て同じ解の集合を持つことに注意する.

定理 2.4

拡大係数行列の基本変形を行っても, 連立方程式の解は変わらない.

行列 A に (いくつかの) 基本変形を行い行列 B が得られるとき, $A \longrightarrow B$ を表す.

例 2.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-3\times①} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

例題 2.6

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対し以下の基本変形を行え.

1. A の 2 行目を 2 倍する (②$\times 2$).
2. A の 1 行目を (-2) 倍して, 3 行目に加える (③ $+$ ① $\times (-2)$). .
3. A の 2 行目と 3 行目を入れ替える (② $\longleftrightarrow$ ③).

解答)

1. $A \xrightarrow{②\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A \xrightarrow{③+①\times(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A \xrightarrow{②\longleftrightarrow③} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

掃き出し法 1

行列の基本変形を用いた連立方程式の解法を**掃き出し法**という.

例題 2.7

行列の基本変形を用いて, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-y+3z=-3 \\ x+2y+4z=1 \end{cases}$ を解け.

解答) 方程式の拡大係数行列 $\tilde{A}$ は次のように基本変形される:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[③+3\times②]{①-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & -20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\times\frac{1}{20}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[②-5\times③]{①+6\times③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

よって求める方程式の解は $x=1, y=2, z=-1$ である.

掃き出し法 2

定理 2.8

連立方程式

$$Ax = \mathbf{b} \tag{$\heartsuit$}$$

の拡大係数行列を $\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$ とする. $\tilde{A}$ に (いくつかの) 行基本変形を行い

$$\tilde{A} \longrightarrow (E \mid \mathbf{b}')$$

となるとき, ($\heartsuit$) の解は $\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ に等しい. ただし E は単位行列を表す.

第 3 回 連立方程式の一般解

本日の講義の目標

目標 3

1. 連立方程式の解をパラメータを用いて表す方法について理解する.
2. 連立方程式に解が存在しない場合の扱いについて理解する.

連立方程式とパラメータ

前回習った方法 (基本変形) を次の方程式に適用すると, 係数行列を単位行列まで変形できない.

例 3.1

連立方程式 $\begin{cases} x+2y=2 \cdots ① \\ 2x+4y=4 \cdots ② \end{cases}$ $\cdots(\heartsuit)$ の拡大係数行列 $\tilde{A}$ に対し,

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{②-2\times①} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

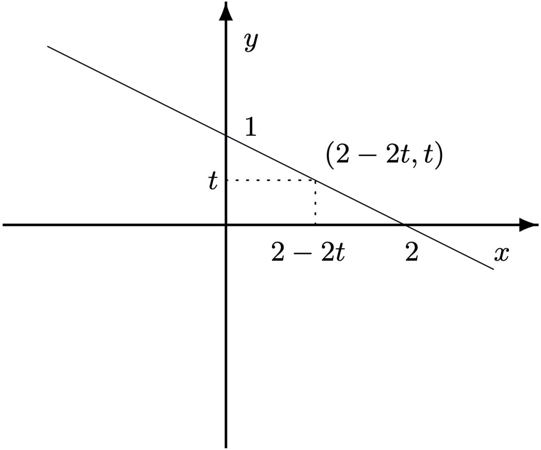
②は①を 2 倍した式に等しいので当然である. 方程式 $(\heartsuit)$ は見かけ上2 本の式からなるが, 本質的には1 本の式 (①または②) で定義されている. このような場合はパラメータ t を用いて全ての解を表せる. 実際, $y=t$ とおくと①式により $x+2t=2$. これを x について解くと,

$$\begin{cases} x = 2-2t \\ y = t. \end{cases} \quad (t \text{ は任意})$$

と表せる. これが方程式 $(\heartsuit)$ の解となる.

方程式の解の空間と幾何

方程式 (♡) の解は xy-平面における直線 $x+2y=2$ 上の点と一対一に対応する. “方程式を解く” ことは “全ての解を求める” ことなので, パラメータ t が必要になる理由がわかる.



連立方程式とパラメータ 2

例題 3.2

連立方程式 $\begin{cases} x+3y+5z=-1 \\ x+2y+6z=0 \\ 2x+3y+13z=1 \end{cases}$ を解け.

解答) 拡大係数行列を変形すると

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 13 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②-①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[③+3\times②]{①-3\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$z=t$ とおけば, 最後の行列の①と②により $x=2-8t$, $y=-1+t$. したがって,

$$\begin{cases} x=2-8t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases} \quad (t \text{ は任意})$$

簡約行列

掃き出し法により連立方程式の解を求めるとき, 拡大係数行列を簡約行列まで変形する (**行列を簡約化する**) ことが重要である.

定義 3.3 (簡約行列)

次の条件を全て満たす行列を**簡約行列**という.

1. 零行があれば, 非零行よりも下に位置する.
2. 非零行の**主成分** (左から見て一番最初の零でない成分) は 1 に等しい.
3. 主成分は下の行ほど右に位置する.
4. 主成分を含む列において, 主成分以外の他の成分は全て 0 に等しい.

例 3.4 (簡約行列の例)

$$\begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & ① & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & ① & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & ① & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ① \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & ① & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

丸囲みの数字の 1 (①) が主成分である (わかりやすいように○で囲んだ).

簡約行列とパラメータの置き方

拡大係数行列を簡約化したのち，主成分 (①) を含まない列の変数をパラメータに取ることにより，連立方程式の (一般) 解を表すことができる．

例 3.5

連立方程式

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

において，主成分を含まない列にある変数 y と w をそれぞれパラメータ t_1 と t_2 に取る．この方程式の解は

$$\begin{cases} x = 5 - 2t_1 - 4t_2 \\ y = t_1 \\ z = 1 - 2t_2 \\ w = t_2. \end{cases} \qquad (\text{ただし } t_1, t_2 \text{ は任意})$$

と表せる．

解が存在しない方程式

拡大係数行列を簡約化したのち, 次のように矛盾する式が出る場合には方程式に **解は存在しない** (“**解なし**” という).

例 3.6

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\text{③}-2\times\text{①}]{\text{②}-\text{①}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\text{③}-\times\text{②}]{\text{①}-\text{②}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

最後の拡大係数行列において第 3 行の式 (③) は

$$0x + 0y + 0z = 1,$$

すなわち $0 = 1$ を要請する. したがって, この方程式の解は存在しない.

階段行列

掃き出し法により連立方程式の解を求めるとき，拡大係数行列を (早い段階で) 階段行列まで変形することが肝要である．階段行列は簡約行列の一般化である：

定義 3.7

次の条件を全て満たす行列を**階段行列**という．

1. 零行があれば，非零行よりも下に位置する．
2. 主成分は下の行ほど右に位置する．
3. 主成分を含む列において，主成分より下に位置する成分は全て 0 に等しい．

階段行列において，非零行ベクトルの主成分は 1 とは限らず，主成分を含む列において，主成分の上に位置する成分は全て 0 とは限らない．

例 3.8 (階段行列の例)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

わかりやすいように主成分を○で囲った．

階段行列と連立方程式

拡大係数行列を階段行列になるまで変形すれば, 方程式の解の存在や解の形が明らかとなる.

例 3.9

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③-2\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

と階段行列に変形され, 唯一の解を持つことがわかる. 番号の大きい式から順番に用いると, ③より $3z = 9$. したがって $z = 3$. ②より $3y - 3 \times 3 = -3$. したがって $y = 2$. ①より $x - 2 + 6 = 5$. したがって $x = 1$.

階段行列まで変形した後は, 上記のように直接代入によって求めても良いが, 最後の行列を簡約行列になるまで変形して解を求めても良い.

第 4 回 掃き出し法と行列の階数

本日の講義の目標

目標 4

1. 掃き出し法の計算に慣れる.
2. 行列の階数について理解する.
3. 連立方程式の解の存在と解の形を拡大係数行列の階数の言葉で理解する.

掃き出し法のテクニック

連立方程式を掃き出し法で求めるとき, 主成分の位置を決定し, 主成分が 1 に等しくなるような変形を心がけるべきである. 次のように "うまく" 変形すれば, 途中の計算で分数の成分を回避して変形できる.

例 4.1

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & -5 \\ 4 & -9 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③\times 3]{②\times 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -12 & 21 & 12 & -15 \\ 12 & -27 & -9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[③-4\times①]{②+4\times①} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & -7 & -1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{③+7\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 27 & -54 \end{array}\right)$$

番号の大きな式から順番に用いれば z, y, x の順に決定され $x = 1, y = 1, z = -2$ (各自で確認すること！). 最初の変形は $(2, 1)$ 成分と $(3, 1)$ 成分を 3 の倍数にするための変形であることに注意する.

行列の簡約化

与えられた行列 A に対し基本変形を繰り返すことにより，簡約行列 B を得る (すなわち $A \to B$) ことを A を**簡約化する**といい，B を A の**簡約化**という．これまでの例から簡約化の存在については，方法論的に理解できるのではないだろうか？実はもっと強く次の定理が知られている．

定理 4.2 (簡約化の一意性)

任意の行列は基本変形を繰り返すことにより簡約化できる．また与えられた行列の簡約化は唯一通りに定まる．

定理 4.2 は，行列 A をひとつ定めれば，途中でどんな基本変形を行ったとしても，A の簡約化 B は唯一つに定まることを保証する．
定理 4.2 は "**ベクトルの 1 次独立性**" という線形代数の深くて重要な概念と関係する．

行列の階数

定理 4.2 を認めることにより, 次の定義が意味を持つ.

定義 4.3

行列 A に対し, A の簡約化 B に現れる主成分の個数を A の**階数**といい, 記号では $\mathrm{rank}\, A$ と表す.

注意 4.4

1. $\mathrm{rank}\, A =$ (B の零でない行ベクトルの個数)
2. $A \to C$ で C が階段行列のとき, $\mathrm{rank}\, A$ は C の主成分の個数に等しい. (A を階段行列 C にまで変形すれば, A の簡約化 B の主成分の位置とその個数がわかる.)

例題 4.5

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ の階数 (rank A) を求めよ.

解答) 基本変形により,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-2\times②} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

と階段行列に変形できる. したがって rank $A = 3$

連立方程式の解の存在と解の形

定理 4.6

連立方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{$\heartsuit$}$$

の拡大係数行列を $\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$ とする. ($\heartsuit$) の解が存在するための必要十分条件は

$$\operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A \tag{$\clubsuit$}$$

が成り立つことである. また条件 ($\clubsuit$) が成り立つとき, (したがって ($\heartsuit$) の解が存在するとき) $\mathbf{x}$ の次元を n とすれば次が成り立つ:

1. $\operatorname{rank} A = n$ ならば ($\heartsuit$) は唯一つの解をもつ.
2. $\operatorname{rank} A < n$ ならば ($\heartsuit$) は無限個の解を持つ.

連立方程式の解のパターン

n 変数 $\mathbf{x}$ に関する連立一次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

は, 解の存在と形について次の三つのパターンのどれか一つに該当する.

1. 解が存在しない (**解なし**) ($\Longleftrightarrow$ rank $\tilde{A} >$ rank A)
2. 解が唯一つ存在する (**一意解**) ($\Longleftrightarrow$ rank $\tilde{A} =$ rank $A = n$)
3. 解が無限個存在する (**不定解**) ($\Longleftrightarrow$ rank $\tilde{A} =$ rank $A < n$)

例 4.7

$\tilde{A}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
rank $\tilde{A}$	2	3	2
rank A	1	3	2
解の種類	解なし	一意解	不定解

例題 4.8

次の連立 1 次方程式の解の個数について調べよ:

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & 0 & -1 \end{array}\right)$ (2) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 13 & 5 & 1 \end{array}\right)$

解答)

1. (与式) $\xrightarrow[③+2\times①]{②+①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$. 従って解は存在しない.
2. (与式) $\xrightarrow{③+3\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 8 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & -8 \end{array}\right)$
$\xrightarrow{③+4\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
拡大係数行列と係数行列の階数が一致 $(=2)$ するので解が存在する. 変数の数は 3 であるため, 解は無限個存在する.

第 5 回 逆行列

本日の講義の目標

目標 5

1. 逆行列の定義について理解する.
2. 逆行列を求める計算について理解する.

逆行列

以下 E_n を n 次の単位行列とする.

例 5.1

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 5.2

n 次正方行列 A に対し

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$$

を満たす行列 A^{-1} を A の**逆行列**という.

A^{-1} の $^{-1}$ は “インバース” と読む. A に対し A^{-1} がいつでも存在するとは限らず,

定義 5.3

A^{-1} が存在する行列 A を**正則行列**という.

注意 5.4

A に対し A の逆行列は (もし存在すれば) 一意に定まる．実際, B_1 と B_2 がともに A の逆行列ならば,

$$B_1 = B_1E_n = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = E_nB_2 = B_2$$

となる．

例 5.5

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ のとき,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

を満たす．同様に計算すると $BA = E_2$ がわかるので, $B = A^{-1}$.

基本行列

E_n を n 次の単位行列とする.

定義 5.6

A を $m \times n$ 行列とし, $T : A \to B$ を行基本変形, すなわち定義 2.3 における三種類のいずれかひとつの変形とする. 同じ変形を単位行列 E_m に行って得られる行列 P_T を T の**基本行列**という.

例 5.7

T を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ とすれば $P_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ である.

三種類の行基本変形 T それぞれに対し, 基本行列 P_T が定まる. 行列 A に行基本変形 $T : A \to B$ を行うことは

“行列 A に左から行列 P_T を乗じて B を得る”

ことに等しい.

逆行列の計算

A を n 次行列とする. A に基本変形 $T_1, T_2, \ldots, T_k$ を行い, 単位行列 E_n を得たとする. 行列の行基本変形を行うことは基本行列を左からかけることに等しいので, このとき T_i の基本行列 $P_i := P_{T_i}$ が存在し,

$$P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = E_n$$

を満たす. $B = P_k P_{k-1} \ldots P_1$ とおけば $BA = E_n$ を得る. 実は $AB = E_n$ であることも示すことができ (定理 10.2 と注意 5.4), $B = A^{-1}$ となる.

定理 5.8

A を n 次行列とする.

$$(A \mid E_n) \longrightarrow (E_n \mid B)$$

ならば, A は正則行列であり $B = A^{-1}$ となる.

逆行列の計算 2

例題 5.9

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

解答)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③-2\times②]{①-2\times②} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[②-2\times③]{①+4\times③} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

よって, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

逆行列が存在するための条件

定理 5.10

n 次行列 A に対し, 次の 3 つの条件は同値である:

1. A は正則 (逆行列 A^{-1} が存在).
2. $\operatorname{rank} A = n$.
3. A に基本変形を行い, 単位行列 E_n が得られる (すなわち $A \to E_n$).

$n = 2$ のときは, 逆行列について次が知られている:

定理 5.11

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. A^{-1} が存在するためには $ad - bc \neq 0$ が必要十分であり,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 5.12

$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ のとき,

$$A \xrightarrow{③+2\times①} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{③-2\times②} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって, $\operatorname{rank} A < 3$ となり, A^{-1} は存在しない (A は正則でない).

例 5.13

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ のとき, $3 \times 6 - 5 \times 1 = 13 \neq 0$. よって A^{-1} が存在し,
$A^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

第 6 回 行列式の定義

本日の講義の目標

目標 6

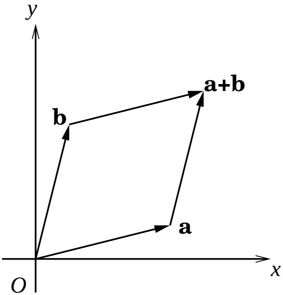
1. 2 次と 3 次の行列式について理解する.

2次行列式

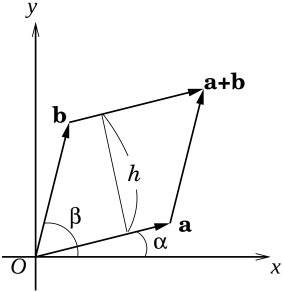
定義 6.1

2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，その行列式 $|A|$ (または $\det A$) を $|A| = ad - bc$ により定義する．

行列式の幾何学的な意味について説明する．2 次行列 A を $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ で定義し，A の 1 行目と 2 行目の行ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ とする．A の行列式 $|A|$ の値は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で張られる平行四辺形の (符号付き) 面積に等しい．



証明



平行四辺形の面積を S とすれば $S = |\mathbf{a}| \times h$ が成り立つ．一方 $h = |\mathbf{b}|\sin(\beta - \alpha)$ が成り立ち，したがって加法定理より，

$$
\begin{aligned}
S &= |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}|\sin(\beta - \alpha) \\
&= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) \\
&= (|\mathbf{a}|\cos\alpha)(|\mathbf{b}|\sin\beta) - (|\mathbf{a}|\sin\alpha)(|\mathbf{b}|\cos\beta) \\
&= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\
&= |A| \quad \square
\end{aligned}
$$

行列式の性質

記法 6.2

平面ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に対し, 1 行目が $\mathbf{a}$ に等しく, 2 行目が $\mathbf{b}$ に等しい行列を $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ と表し, その行列式を $\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$ と表す.

行列式は以下の性質をもつ.

命題 6.3

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を平面ベクトルとし, k をスカラーとする.

(1) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}+\mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} k\mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ k\mathbf{b} \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}+k\mathbf{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}+k\mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{vmatrix} = 1$ (ただし $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

いずれの性質も平行四辺形の面積の言葉で幾何学的に解釈することが可能である. 性質 (1) と (2) を行列式の**線形性**, (3) を**交代性**, (5) を**正規性**と呼ぶ.

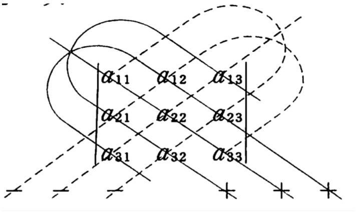
3次行列式

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ を 3 次行列とする. A の行列式 $|A|$ を次で定義する.

定義 6.4

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array} .$$

サラスの方法



3 次行列式と平行六面体

A の 3 つの行ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ とし,
(2 次行列式のときと同様に) 行列

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

の行列式 $|A|$ を

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

と表せば, 3 次行列式 $|A|$ の値は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を隣り合う 3 つの辺とする**平行六面体**の体積 V に等しい.

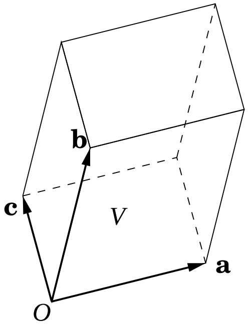


Figure: 平行六面体

行列式の計算

例題 6.5

次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

解答) サラスの方法により計算する.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} = 4 \times 11 - 8 \times 9 = -28.$

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 4 \times 8 \times 3 \\ &\qquad - 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 4 \times 9 - 1 \times 8 \times 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

行列式の定義

順列

行列 A を n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ とする．$1 \leq k \leq n$ に対し，A の第 k 行から 1 つ成分 a_{ki_k} を選ぶ．このとき同じ列の成分を 2 つ以上とらないようにし，それらの積

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

を考える．このとき添字の組

$$\pi = (i_1, \ldots, i_n)$$

は 1 から n までの整数を並び替えた数列となる．このような $(1, 2, \ldots, n)$ の並び替えとして得られる数列を (長さ n の) **順列**という．

定義 6.6

長さ n の順列 $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ の中から 2 つの数 i_k と i_l $(k \neq l)$ をとり,

$$i_k > i_l \quad \text{かつ} \quad k < l$$

となる組 (k, l) を**転倒**と呼ぶ. 転倒の個数が偶数である順列を**偶順列**, 奇数である順列を**奇順列**という.

例 6.7 (長さ 3 の順列とその転倒数)

順列	転倒の個数	偶奇
$(1\ 2\ 3)$	0	偶
$(2\ 3\ 1)$	2	偶
$(3\ 1\ 2)$	2	偶
$(3\ 2\ 1)$	3	奇
$(2\ 1\ 3)$	1	奇
$(1\ 3\ 2)$	1	奇

行列式の定義

順列の符号 2

次の順列の符号が行列式の定義に用いられる.

定義 6.8

順列 $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ に対し, 符号 $\mathrm{sgn}(\pi)$ を

$$\mathrm{sgn}(\pi) := \begin{cases} 1 & (\pi \text{ は偶順列}) \\ -1 & (\pi \text{ は奇順列}) \end{cases}$$

と定める.

長さ n の順列は全部で $n!$ 個存在するが, これらの順列に関し

$$\mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_n) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

の和を取ったものを A の**行列式**といい, 記号 $|A|$ (または $\det A$) により表す.

定義 6.9 (行列式)

$$|A| = \sum_{(i_1, \ldots, i_n)} \mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_n) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

例

- $(n=2)$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のとき,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(1\ 2)a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}(2\ 1)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- $(n=3)$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ のとき, $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ は,

$$\begin{aligned} |A| &= \operatorname{sgn}(1\ 2\ 3)a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn}(2\ 3\ 1)a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sgn}(3\ 1\ 2)a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad + \operatorname{sgn}(2\ 1\ 3)a_{12}a_{21}a_{33} + \operatorname{sgn}(1\ 3\ 2)a_{11}a_{23}a_{32} + \operatorname{sgn}(3\ 2\ 1)a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad \text{(サラスの公式)} \end{aligned}$$

第 7 回 行列式の性質

本日の講義の目標

目標 7

1. 行列式の性質 (線形性, 交代性, 正規性) について理解する.
2. 行列式の性質を用いた計算方法について理解する.

行列式の性質

行列 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ の行列式を $|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$ と表す．行列式は次の性質をもつ．

命題 7.1

k を任意のスカラーとし，i, j を任意の整数とする．

(1) $$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

(4) $|E| = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{vmatrix} = 1$　　ただし E は単位行列 $E = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$ とする．

(1) と (2) を**線形性**, (3) を**交代性**, (4) を**正規性**という．

例

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+1 & 3+2 & 5+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3\times 1 & 3\times 2 & 3\times 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{②\leftrightarrow③}{=\!=\!=} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

行列式の性質 2

命題 7.2

二つの行が等しい行列 A に対し, 行列式 $|A|$ の値は 0 に等しい.

証明)

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \overset{\text{行を交換}}{=\!=\!=\!=} (-1) \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = -|A|.$$

したがって $2|A| = 0$, すなわち $|A| = 0$. □

命題 7.3

行列 A のある行に他の行の定数倍を加えても行列式 $|A|$ の値は不変である.

証明)

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + k \times 0 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j + k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} (=: |B|). \quad \square$$

この等式の左辺と右辺を比較すれば, j 行目に i 行目の k 倍を加える基本変形を A に行い B を得たように見える:

$$|A| \overset{j+k\times i}{=\!=\!=\!=} |B| \qquad \left(A \xrightarrow{j+k\times i} B\right).$$

行列式の性質 4

命題 7.4

行列の転置をとっても, 行列式の値は不変である.

例 7.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & x \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

命題 7.4 より行列式の次の性質を得る.

命題 7.6

行列式の行に関する性質はすべて列でも成立する (列基本変形に関する性質など).

行列式の性質 5

命題 7.7

$$\left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

命題 7.7 はこの後学ぶ**行列式の余因子展開** (定理 8.5) の特別な場合になっている．$\left|\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline \mathbf{0} & A' \end{array}\right| = a|A'|$ (ただし A' は A から 1 行 1 列を除いた行列) と表す．命題 7.4 により，$\left|\begin{array}{c|c} a & \mathbf{0} \\ \hline * & A' \end{array}\right| = a|A'|$ も成立する．これらの性質は行列式の計算をより小さなサイズの行列式の計算へと帰着することを可能にする．

例

例 7.8

$$\left|\begin{array}{c|cc} 3 & \pi & 1+x \\ \hline 0 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 9 \end{array}\right| = 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 3(4\times 9 - 8\times 5) = 3\times(-4) = -12.$$

階段行列の行列式の値は対角成分の積に等しい.

例 7.9

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

行列式の計算への応用 1

以下では $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ により, 1 列, 2 列, 3 列を表す.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{③-3\times①}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} \overset{\text{命題 7.7}}{=\!=\!=} 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times 7 - 5^2 = 3.$

(2) (列基本変形と組合せた計算例)

$$\begin{vmatrix} 95 & 96 & 97 \\ 96 & 97 & 99 \\ 97 & 98 & 99 \end{vmatrix} \underset{②-①}{\overset{③-①}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 95 & 96 & 97 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\boxed{2}-\boxed{1}}{\overset{\boxed{3}-\boxed{1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 95 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{1}\leftrightarrow\boxed{2}}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 95 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times (-2) = 2.$$

行列式の計算への応用 2

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 8 \times 10 = 400.$$

(4) (Vandermonde 型行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\boxed{3}-\boxed{1}]{\boxed{2}-\boxed{1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ (y-x)(y+x) & (z-x)(z+x) \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y).$$

第 8 回 余因子と行列式の展開

本日の講義の目標

目標 8

1. 行列の小行列式と余因子について理解する.
2. 行列式の余因子展開について理解する.

小行列式と余因子

A を n 次 (正方) 行列とする.

定義 8.1

A から第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次の行列 A_{ij} の行列式 $|A_{ij}|$ を A の (i, j) **小行列式**とよび, 記号 D_{ij} で表す. また,

$$\Delta_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

を A の (i, j) **余因子**という.

例 8.2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} D_{23} = -(-2) = 2.$ 同様に $D_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 3 \times 4 = -10.$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} D_{12} = -(-10) = 10.$

小行列式と余因子 2

小行列式と余因子

$$A \xrightarrow{i\text{ 行と }j\text{ 列を取り除く}} A_{ij} \xrightarrow{\text{行列式をとる}} D_{ij} \xrightarrow{\times(-1)^{i+j}} \Delta_{ij}$$

(小行列式) (余因子)

余因子の定義における $(-1)^{i+j}$ は $i+j$ の偶奇により ± 1 のいずれかの値をとる.

注意 8.3 (余因子の符号)

(i,j) 成分の位置に $(-1)^{i+j}$ の符号を書くと,

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} \quad \cdots$$

のようになる ($+$ と $-$ がチェック模様のように交互に現れる).

例題 8.4

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の (i,j) 余因子 Δ_{ij} $(1 \leq i,j \leq 3)$ を計算し，それを (i,j) 成分とする行列 $B = (\Delta_{ij})$ を書け．

解答)

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \qquad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

よって，

$$B = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 \\ 10 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

行列式の余因子展開

A を n 次行列とし，その (i,j) 成分を a_{ij} で表す $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n)$.

定理 8.5

A の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とする．このとき，A の行列式 $|A|$ に対し，

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

が成り立ち，この式を $|A|$ の**第 i 行に関する展開**という．また，

$$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$

が成り立ち，同様に $|A|$ の**第 j 列に関する展開**という．

すなわち，A の第 i 行 (第 j 列) の成分に第 i 行 (第 j 列) の余因子をかけて足し合わせると，A の行列式 $|A|$ の値に等しくなることを意味している (命題 7.4 から行に関する性質は列でも成立する).

例 8.6

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

とする. $|A|$ を 1 行で展開すると,

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot \Delta_{11} + 3 \cdot \Delta_{12} + (-1) \cdot \Delta_{13} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3 - 9 + 0 = -12. \end{aligned}$$

$|A|$ を 2 列で展開すると,

$$\begin{aligned} |A| &= 3 \cdot \Delta_{12} + (-2) \cdot \Delta_{22} + 1 \cdot \Delta_{32} \\ &= 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -9 + 0 - 3 = -12. \end{aligned}$$

行列式の余因子展開 (つづき)

注意 8.7

行列式の展開は任意の行 (列) で行なって良い. 勝手な行 (列) をひとつ選んで展開すれば, 行列式の値を計算できる.

例 8.8

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

- (むだな計算)

$$|A| \xlongequal{\text{①で展開}} 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 12 = 32.$$

- (効率的な計算)

$$|A| \xlongequal{\text{③で展開}} 4\Delta_{32} = 4 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = 4 \cdot 8 = 32.$$

命題 7.7 は余因子展開の特別な場合と捉えることができる.

命題 8.9 (命題 7.7 再掲)

$$\left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

すなわち

$$\left|\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline \mathbf{0} & A' \end{array}\right| = a|A'| = \left|\begin{array}{c|c} a & \mathbf{0} \\ \hline * & A' \end{array}\right|$$

が成立する. 実際, ここで $|A'|$ は A の $(1,1)$ 余因子に等しい.

“行列式の基本変形” との合わせ技

行列式の余因子展開は “**行列式の基本変形**” (命題 7.3) と組み合わせて用いると，計算が “楽ちん” である．

例 8.10

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}+\boxed{3}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 5 & -5 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{②で展開}}{=\!=\!=} 1 \cdot \Delta_{23} =$$

$$1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & -5 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{③-②}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 5 & -5 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{③で展開}}{=\!=\!=} -2\Delta_{31} =$$

$$-2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2(-5 \times 2 - 9 \times 3) = 74.$$

行列式の計算のまとめ

計算のポイント

1. 行列式の "基本変形" を用いて 0 を多く含む行 (または列) をつくる.
2. 余因子展開を用いて 0 を多く含む行 (または列) において展開する.

第 9 回 余因子行列と逆行列

本日の講義の目標

目標 9

1. 余因子展開の一般化について理解する.
2. 余因子行列と逆行列について理解する.

行列式の余因子展開 (復習)

A を n 次行列とする．A から i 行 j 列を取り除いた行列式 D_{ij} を A の (i,j) **小行列式**と呼び，$\Delta_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ij}$ で定義される式を A の (i,j) **余因子**と呼んだ．

A のある行 (または列) において，成分と対応する余因子を掛け合わせて加えると A の行列式 $|A|$ の値に等しい．

例 9.1 (行列式の余因子展開)

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{aligned}
|A| &= 5 \cdot \Delta_{11} + 1 \cdot \Delta_{12} + 2 \cdot \Delta_{13} \qquad (\text{①で展開}) \\
&= 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-13) + 2 \cdot (-5) \\
&= -8.
\end{aligned}$$

基本変形との合わせ技

行列式を展開する前に行列式の基本変形 (掃き出し法) により, 成分に 0 を多く含む行 (または列) を作ると良い.

例 9.2

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[③-①]{②-2\times①} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\boxed{2}\text{で展開}} 1 \cdot \left(- \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = -8.$$

行列式を “効率的に計算” するためには,

- 行列式の余因子展開
- 掃き出し法 (基本変形)

をうまく組み合わせると良い.

問題

定理 9.3 (行列式の余因子展開 (再掲))

$A = (a_{ij})$ の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とする．このとき次が成り立つ:

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \qquad (\text{第 } i \text{ 行に関する展開}) \tag{9.1}$$

$$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \qquad (\text{第 } j \text{ 列に関する展開}) \tag{9.2}$$

問題 9.4

式 (9.1) の右辺において，A の成分 $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ (第 i 行の成分) を $k \neq i$ に対し，それぞれ $a_{k1}, \ldots, a_{kn}$ (第 k 行の成分) に置き換えた式

$$a_{k1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{kn}\Delta_{in} \qquad (k \neq i)$$

は何を表すか?

実験と考察

例 9.5

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\Delta_{11} + 1\Delta_{12} + 2\Delta_{13}.$$

右辺の第 1 行の成分である $5, 1, 2$ を第 2 行の成分である $7, 2, -1$ に置き換えると,

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 7 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7\Delta_{11} + 2\Delta_{12} + (-1)\Delta_{13}.$$

となる. 左辺の行列式は第 1 行と第 2 行が等しいので, 行列式の交代性 (命題 7.2) により, 右辺の式の値は0 に等しい.

つまり

$$k \neq i \Longrightarrow a_{k1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{kn}\Delta_{in} = 0$$

がわかる.

余因子展開の一般化

定理 9.3 は次のように一般化される.

定理 9.6

n 次行列 $A = (a_{ij})$ とその余因子 Δ_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ に対し, 次が成り立つ:

$$a_{i1}\Delta_{j1} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn} = \begin{cases} |A| & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$a_{1j}\Delta_{1k} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nk} = \begin{cases} |A| & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

上の定理は第 i 行の成分に第 j 行の余因子を掛けて足し合わせるとき, $i = j$ ならば行列式 $|A|$ に等しくなるが, $i \neq j$ のときは 0 になることを意味する.

再び実験と考察

例題 9.7

3 次行列 $A = (a_{ij})$ とその余因子 Δ_{ij} $(1 \leq i, j \leq 3)$ に対し，次の行列の積を計算せよ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$$

解) 求める行列の $(1,1)$ 成分は

$$a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

に等しく，この式は A の第 1 行に関する余因子展開の式に等しい．同様に対角成分は $|A|$ に等しい．一方，$(1,2)$ 成分は

$$a_{11}\Delta_{21} + a_{12}\Delta_{22} + a_{13}\Delta_{23}$$

に等しく，定理 9.6 より 0 に等しい．同様に $i \neq j$ のとき (i,j) 成分は 0 に等しい．したがって求める行列は

$$\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A|E_3.$$

余因子行列

定義 9.8

正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し，A の (i,j) 余因子 Δ_{ij} を (i,j) 成分にもつ行列 (Δ_{ij}) の<u>転置行列</u>

$$\mathrm{adj}(A) := {}^t(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

を A の**余因子行列，または随伴行列** *(adjugate matrix)* という．

例題 9.7 と同様に次が成り立つ．

定理 9.9

A を正方行列とし，$\mathrm{adj}(A)$ を A の随伴行列とする．このとき

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = |A|E,$$

(ただし E は単位行列) が成り立つ．

逆行列への応用

定理 9.9 より次の系を得る.

系 9.10

正方行列 A に対し, $|A| \neq 0$ ならば A は正則行列であり,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A).$$

注意 9.11

- 実は「A が正則 $\iff |A| \neq 0$」が成り立つ (定理 10.2).
- 逆行列の計算において, 一般的に掃き出し法による求め方 (定理 5.8) が系 9.10 よりも便利である. しかし理論的な場合や行列に文字が含まれる場合などには後者が便利である.

例題 9.12

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

解答)　例題 8.4 より,$(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 \\ 10 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ である．一方 A の行列式 $|A|$ の値は $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{②-2\times③}{\overset{①-2\times③}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}\text{で展開}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} =$ $(-6)(-2)-(-5)(-1) = 7$ と計算され, $|A| \neq 0$ となる．したがって系 9.10 より

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{|A|}{}^t(\Delta_{ij}) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 10 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

第 10 回 行列式のまとめ

本日の講義の目標

目標 10

1. 行列式の乗法性について理解する.
2. 行列式を用いた行列の正則性の条件について理解する.

余因子行列と逆行列 (復習)

前回の講義では余因子行列と逆行列の関係について学んだ. n 次正方行列 A に対し, A の (i,j) 余因子を Δ_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ で表せば, A の余因子行列 $\mathrm{adj}(A)$ は

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

により定義され,

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = |A|E \qquad (E \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

を満たす. とくに $|A| \neq 0$ のとき, A は正則であり

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)$$

が成り立つ (定理 9.9, 系 9.10).

行列式の乗法性

実は A が正則であるためには $|A| \neq 0$ が必要十分であることがわかる.

定理 10.1

n 次行列 A, B に対し,

$$|AB| = |A||B|$$

が成り立つ.

実際, 定理 10.1 を認めると, A が正則ならば,

$$1 = |E| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$$

が成りたち, とくに $|A| \neq 0$ がわかる.

定理 10.2

正方行列 A に対し,

$$A \text{ が正則} \iff |A| \neq 0$$

定理 10.1 (行列式の乗法性) の証明

$2n$ 次の行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}$ を考える．この行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

と計算される．一方 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し，列基本変形

$$\boxed{\text{n+k}} + b_{1,k} \times \boxed{1} + b_{2,k} \times \boxed{2} \cdots + b_{n,k} \times \boxed{n}$$

を行うと

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix}$$

と変形される．最後の式は

$$\begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -E & O \\ A & AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & O \\ A & AB \end{vmatrix} = |AB|$$

と変形されるので，求める主張 $|AB| = |A||B|$ を得る． □

例題 10.3

行列 $A = \begin{pmatrix} a-5 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & a-9 \\ 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$ が正則でないような定数 a の値を全て求めよ.

解答) A の行列式の値は,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a-5 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & a-9 \\ 0 & a-2 & 0 \end{vmatrix} \\ &\underline{\underline{\text{③で展開}}}\ (a-2)\left(-\begin{vmatrix} a-5 & 1 \\ -3 & a-9 \end{vmatrix}\right) \\ &= -(a-2)\left\{(a-5)(a-9)+3\right\} \\ &= -(a-2)\left\{a^2-14a+48\right\} \\ &= -(a-2)(a-6)(a-8) \end{aligned}$$

となる. 定理 10.2 より, 求める定数 a の値は $a = 2, 6, 8$.

例題 10.4

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，

(1) AB (2) B^3 (3) A^{-1}

の行列式の値を求めよ．

解答) A と B の行列式の値は，サラスの公式によりそれぞれ

$$|A| = 1^3 + 2^3 + 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18,$$
$$|B| = 1^3 + 0 + 0 - 0 - (-2)^2 - (-2)^2 = -7,$$

と求められる．定理 10.1 より

$$(1) \quad |AB| = |A||B| = 18 \cdot (-7) = -126.$$
$$(2) \quad |B^3| = |B|^3 = (-7)^3 = -343.$$
$$(3) \quad |A^{-1}| = |A|^{-1} = 1/18.$$

文字を含む行列式

前々回の講義で紹介した

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

は次の行列式の特別な場合である.

例 10.5 (Vandermonde 型行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

は変数の差の全ての積を掛け合わせるので**差積**とも呼ばれる.

文字を含む行列式 2

次の行列式も有名である.

例 10.6 (巡回型行列式)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

実際, 各列 (各行) の和が $x+y+z$ に等しいので,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \underline{\underline{①+②+③}} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

と式変形できて, 最後の式を計算すると右辺の式に等しくなる. 左辺の式を展開することにより, 次の等式が得られる:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

文字を含む行列式 3

例題 10.7

行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b \\ 3a & 2a+b & a+2b \\ a+2b & 2a+b & 3b \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

解答)

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ 3a & 2a+b & a+2b \\ a+2b & 2a+b & 3b \end{vmatrix} \underset{③-3\times①}{\overset{②-3\times①}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a & b & b \\ 0 & 2(a-b) & a-b \\ -2(a-b) & 2(a-b) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & b & b \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2(-2b+4b-2a)$$

$$= (a-b)^2(2b-2a)$$

$$= -2(a-b)^3.$$

行列の正則性

最後に行列の正則性に関する条件を整理してこの講義を終えることにする．

定理 10.8

n 次正方行列 A に対する次の条件は同値である [a]:

1. $\operatorname{rank} A = n$.
2. A の簡約化は n 次単位行列 E_n に等しい．
3. 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ はただひとつの解をもつ．
4. A は正則行列である (逆行列 A^{-1} が存在する).
5. A の行列式 $|A|$ の値は非零．

[a] 1. から 3. については第 4 回講義を，4. については第 5 回講義を，5. については第 10 回講義を参照せよ．