線形代数1, 第2回の内容の理解度チェック (解答)

2020/5/18 担当：那須

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対し以下の基本変形を行え. (各1点)

(1) A の2行目を2倍する. (②$\times 2$).

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) A の1行目を (-2) 倍して, 3行目に加える. (③ $+$ ① $\times (-2)$).

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) A の2行目と3行目を入れ替える. (② $\longleftrightarrow$ ③).

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ 指示に従って (行列の基本変形を用いて) 連立1次方程式

$$\begin{cases} x + 3y - 2z &= 12 \\ 3x + 10y - z &= 55 \\ 2x - 4y + 3z &= 5 \end{cases} \qquad (\heartsuit)$$

を解け. (各1点)

(1) 連立1次方程式 $(\heartsuit)$ の拡大係数行列 A_1 を書け.

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 12 \\ 3 & 10 & -1 & 55 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

(2) A_1 に次の基本変形を行うことにより, 次の形の行列 A_2 に変形せよ：1行目の -3 倍を2行目に加える. 1行目の -2 倍を3行目に加える.

$$A_1 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & -10 & 7 & -19 \end{array}\right) = A_2$$

(3) A_2 に次の基本変形を行うことにより, 次の形の行列 A_3 に変形せよ：2行目の -3 倍を1行目に加える. 2行目の10倍を3行目に加える.

$$A_2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -17 & -45 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 57 & 171 \end{array}\right) = A_3$$

(4) A_3 に次の基本変形を行うことにより, 次の形の行列 A_4 に変形せよ：3 行目に 1/57 をかける.

$$A_3 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -17 & -45 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = A_4$$

(5) A_4 に次の基本変形を行うことにより, 次の形の行列 A_5 に変形せよ：3 行目の 17 倍を 1 行目に加える. 3 行目の -5 倍を 2 行目に加える.

$$A_4 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = A_5$$

(6) 連立一次方程式 (♡) の解を書け.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ 行列の基本変形を用いて, 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y - z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= -3 \\ x + 2y + 4z &= 1 \end{cases} \qquad (♡)$$

を解け. (3 点)

拡大係数行列は $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$ に等しい.

$$\tilde{A} \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[③+3\times②]{①-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow{③\times\frac{1}{20}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②-5\times③]{①+6\times③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

よって $x = 1, y = 2, z = -1$.

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2020/la1.html