

1 次の行列式の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 7 & -13 \\ 17 & -23 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 97 & 98 & 99 \\ 95 & 96 & 97 \\ 98 & 99 & 99 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (6) \begin{vmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (7) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \right|$$

2 次の行列 A の逆行列を求めよ. また A の逆行列が存在しない場合には, 理由とともに「逆行列は存在しない」と答えよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 次のベクトルの組の1次独立性を判定せよ.

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(3) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (4) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4 次の行列を対角化せよ. なお答えは, 「 $P = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること.

$$(1) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -15 & -7 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5) A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

5 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -15 & -7 \end{pmatrix}$ に対し, A^n と B^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

6 次の行列の中で対角化が可能でないものを全て選べ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad (4) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答 (略解)

1 (1) -21 (2) 60 (3) -32 (4) -2 (5) 17 (6) 8 (7) 0

2 (1) $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ (3) A の行列式 $|A|$ の値が 0 に等しいので, A^{-1} は存在しない.

3 (1) 1次独立 (2) 1次従属 (3) 1次独立 (4) 1次従属

4 (1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

(2) $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる.

(3) $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

(4) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

(5) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

5 $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3^{n+1} & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} & -3 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$ $B^n = \begin{pmatrix} -5(-2)^n + 6(-1)^n & (-2)^{n+1} + 2(-1)^n \\ 15(-2)^n - 15(-1)^n & -5(-1)^n + 3(-1)^n 2^{n+1} \end{pmatrix}$

6 (1) (3) (6) (8)