中間試験準備問題

$\boxed{1}$ i を虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ とする.

(1) 次の複素数を極形式を用いて表せ.
(a) $\alpha = 1-i$ (b) $\beta = 2-2\sqrt{3}i$ (c) $\gamma = -\sqrt{3}-i$

(2) 次の絶対値 r と偏角 θ を持つ複素数を直交形式 $a+bi$ (a, b は実数) を用いて表せ.
(a) $r=4, \theta=\dfrac{5}{4}\pi$ (b) $r=2\sqrt{3}, \theta=\dfrac{2}{3}\pi$ (c) $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \theta=\dfrac{3}{4}\pi$

(3) α, β, γ が (1) の複素数のとき, 次を計算せよ. なお答えは直交形式に直して答えよ.
(a) α^7 (b) β^{-3} (c) γ^4

$\boxed{2}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して、以下の行列演算が可能ならば演算で得られる行列を求め、演算不可ならばその理由を述べよ。

(1) $A+B$ (2) $B-A$ (3) AC (4) BD (5) DC

$\boxed{3}$ 掃き出し法 (基本変形) を用いて, 次の連立 1 次方程式を解け. なお方程式に解が存在しない場合には「解なし」と答えよ.

(1) $\begin{cases} 2x-5y=-29 \\ 3x-7y=-41 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-6y=-6 \\ 4x-8y=-8 \end{cases}$.

(3) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ -x+y+2z=15 \\ -2x+y+2z=17 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+2y+4z=-1 \\ -x+y+5z=-2 \\ 2x-y-7z=3 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} 3x+9y+6z=4 \\ -x+y+2z=6 \\ -3x-2y+z=9 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x+y+z-w=1 \\ x+y+z=-1 \\ -x-y+z-w=1 \\ -x+y+z+w=-1 \end{cases}$ (7) $\begin{cases} x+z-w=1 \\ y+w=-1 \\ -x-y+z-w=1 \\ -x+y+z+w=-1 \end{cases}$.

$\boxed{4}$ 次の行列の階数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & 2 & 6 \\ 3 & -6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & -10 & -1 & -7 \\ 3 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ 次の行列に対して、逆行列が存在するならば逆行列を求め、存在しないならば**非正則**と記せ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (6) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{6}$ 次のベクトルの各組の１次独立性について判定せよ.

(1) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$　(2) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}$　(3) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}$

(4) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$　(5) $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\9\end{pmatrix}\right\}$

---

[0]略解:

$\boxed{1}$ (1) (a) $\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$　(b) $4(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi)$　(c) $2(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)$

(2) (a) $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$　(b) $-\sqrt{3} + 3i$　(c) $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

(3) (a) $8 + 8i$　(b) $-\frac{1}{64}$　(c) $-8 + 8\sqrt{3}i$

$\boxed{2}$ (1) $\begin{pmatrix}6 & 3\\3 & 3\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}2 & 9\\-5 & 1\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\13 & 9 & 3\end{pmatrix}$　(4) 定義されない. (B の列数と D の行数が異なるため)　(5) $\begin{pmatrix}11 & 8 & 1\\-2 & -1 & -2\\5 & 4 & -1\end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ (1) $x = -2, y = 5$　(2) $x = 2t - 2, y = t$ (t は任意)　(3) $x = -2, y = 3, z = 5$　(4) $x = 1 + 2t, y = -1 - 3t, z = t$ (t は任意)　(5) 解なし (拡大係数行列と係数行列の階数が異なるため)　(6) $x = -1, y = 1, z = -1, w = -2$　(7) $x = z = \frac{1+t}{2}, y = -t - 1, w = t$ (t は任意)

$\boxed{4}$ (1) 2　(2) 1　(3) 3

$\boxed{5}$ (1) $A^{-1} = \begin{pmatrix}-7 & -3\\-5 & -2\end{pmatrix}$　(2) 非正則　(3) $A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}9 & -5\\-7 & 3\end{pmatrix}$　(4) $A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 9 & -6\\-1 & -7 & 5\\1 & 4 & -3\end{pmatrix}$　(5) $A^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\-5 & 4 & -3\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$　(6) 非正則

$\boxed{6}$ (1) １次独立　(2) １次従属　(2) １次独立　(2) １次独立　(2) １次従属

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2019/lasc.html