線形代数 (SC), 第 19 回演習問題

2020/1/6 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列 A を対角化せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ n を整数とする. 次の行列 A のべき乗 A^n を計算せよ. ただし, (2) については, 問題 $\boxed{1}$ で求めた行列の対角化を利用して計算しても良い.

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

[0]解答：$\boxed{1}$ (1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ (3) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$ (1) $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (2) $A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\cdot 5^n + 2(-3)^n & 5^n - (-3)^n \\ 4\cdot 5^n - 4(-3)^n & 2\cdot 5^n + 2(-3)^n \end{pmatrix}$ (3) $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-2)^n + 4^n & 0 & -(-2)^n + 4^n \\ -(-2)^n + 4^n & 2 & -2 + (-2)^n + 4^n \\ -(-2)^n + 4^n & 0 & (-2)^n + 4^n \end{pmatrix}$

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2019/lasc.html