線形代数２，期末テスト準備問題２

2020/1/9 担当：那須

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ により定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ に対し,

(a) f の核 $\ker f$ の次元と 1 組の基底, (b) f の像 $\operatorname{im} f$ の次元と 1 組の基底,

を求めよ．ただし, $\operatorname{im} f$ の基底は A の列ベクトルから選ぶものとする．A の 1 列目から順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ とし, 基底は列ベクトルの部分集合 $\{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ $(i_1 < \cdots < i_r)$ として表すこと.

$\boxed{2}$ (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値 λ を全て求めよ.

(2) A の固有ベクトル $\mathbf{x}$ を全て求めよ．(どの固有値に対する固有ベクトルかを明らかにすること．)

$\boxed{3}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を全て求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則な正方行列 P を 1 つ与えよ. なお答えは,「$P = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること. (括弧の中には行列が入る.)

(3) 自然数 n に対し, A のべき A^n を求めよ.

$\boxed{4}$ (1) n 次正方行列 A の固有多項式が

$$|A - \lambda E| = (-1)^n(\lambda - a_1)^{m_1} \dots (\lambda - a_k)^{m_k}, \qquad (\text{ただし } i \neq j \text{ のとき } a_i \neq a_j)$$

のように 1 次式の積に分解するとき, A が対角化可能であるための必要十分条件を書け.

(2) 次の行列の中で対角化が<u>可能でないもの</u>を<u>全て</u>選び, 空欄の中に番号を記入せよ. なお, 解答は答え (番号) のみで良い.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(5) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, (6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, (7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

答 $\boxed{}$

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ に関して, 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ の表現行列を求めよ.

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2019/la2.html