線形代数２，期末テスト準備問題１

2020/1/6 担当：那須

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 11 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & -2 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ により定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ に対し，

(a) f の核 $\ker f$ の次元と１組の基底,　　(b) f の像 $\mathrm{im}\, f$ の次元と１組の基底,

を求めよ．ただし, $\mathrm{im}\, f$ の基底は A の列ベクトルから選ぶものとする．A の１列目から順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ とし, 基底は列ベクトルの部分集合 $\{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ $(i_1 < \cdots < i_r)$ として表すこと．

$\boxed{2}$ (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ を全て求めよ．

(2) A の固有ベクトル $\mathbf{x}$ を全て求めよ．

$\boxed{3}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を全て求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則な正方行列 P を１つ与えよ．(A を対角化せよ.)

(3) 自然数 n に対し, A のべき A^n を求めよ．

$\boxed{4}$ 次の行列の中で対角化が<u>可能でないもの</u>を<u>全て</u>選べ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,　(3) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$,　(4) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,　(5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ ２次以下の実係数多項式のなすベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_2$ とする．$\mathbb{R}[x]_2$ 上の次の線形変換 T に対し，

(a) 基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列 A,　　(b) T の固有値 λ と固有ベクトル $f(x)$

を求めよ．(教科書 p.103, 例題 5.3.2 参照)

(1) $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, $T(f(x)) = f(1-3x)$

(2) $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, $T(f(x)) = f(3x) + f'(x)$

---

[0] 講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく．http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2019/la2.html