中間試験準備問題 (その 1)

- 中間試験の直前の回に演習を行います. 以下の問題を各自で解いてきておくように.

$\boxed{1}$ 次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -10 & 10 \\ 16 & -16 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ 掃き出し法を用いて, 次の連立 1 次方程式を解け.

(1) $\left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$　(2) $\left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$\boxed{3}$ 次の 3 変数連立 1 次方程式が解を持つように定数 a の値を定め, 連立 1 次方程式を解け.

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & -8 \\ 2 & -1 & 7 & a \end{array}\right)$　(2) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$

$\boxed{4}$ 次の行列式を求めよ. ただし (3),(4) は因数分解した形で答えること.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 9 \\ -8 & 2 & -5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$

$\boxed{5}$ 次の行列 A に対し, 以下の問い (a), (b) に答えよ.

(a) A の (i, j) 余因子を Δ_{ij} で表す. 次の行列 $B = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$ を求めよ.

(b) A の行列式 $|A|$ を求め, もし A が正則 (逆行列 A^{-1} が存在する) ならば, A^{-1} を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

[0]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2019/la2.html

問題は裏にもあります

$\boxed{6}$ (1) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の部分集合 W が部分空間であるための必要十分条件を書け.

(2) 次の部分集合 W はベクトル空間 $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ の部分空間であるかどうかについて判定せよ.

(a) $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y = z, 3x - y = 0 \right\}$

(b) $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = 1, y = 2 \right\}$

(c) $W = \{(0,0,0)\}$

(d) $W = \left\{ \mathbf{x} = (s-1, t+1, s+t) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$

(e) $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$

(f) $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$

$\boxed{7}$ 次のベクトルの各組の１次独立性について判定せよ.

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ (2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ (3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(4) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (5) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{8}$ $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5$ を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする. 以下の問いに答えよ. なお途中計算や論理も丁寧に記述せよ.

(1) １次独立なベクトルの最大個数 r を求めよ.

(2) r 個の１次独立なベクトルを $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5$ のうち, 前から順に求めよ.

(3) 他のベクトルを (2) のベクトルの１次結合として書き表せ.

$\boxed{9}$ 連立方程式の解空間

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 8 \\ -2 & -4 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

の次元と１組の基底を求めよ. なお途中計算や論理も丁寧に記述せよ.