線形代数 2, 中間試験問題＆解答用紙

2019/11/18 担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | 氏名 | 点数

- 問題用紙は 1 枚, 裏表合わせて全部で 4 問ある. **解答は問題用紙の余白に書くこと**.
- 答えには下線を引くなどし, わかりやすくすること. 途中の式や論理を欠いた解答, 字の粗末な解答, 答えがどれか判別つかない解答は, 減点の対象になる場合がある.

$\boxed{1}$ 次を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき逆行列 A^{-1}

$\boxed{2}$ (1) V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. V の部分集合 W が V の部分空間であるための定義 (必要十分条件) を述べよ.

(2) W を $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ の次の部分集合とする. W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になるかについて答えよ (答えのみで良い).

(a) $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0, y - 3z = 0\}$

(b) $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 + z, y = 2 - 3z\}$

(c) $W = \{\mathbf{x} = (s-1, t-1, s+t) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$

(d) $W = \{(1,1,1)\}$

解答欄：(a) (b) (c) (d)

(3) (選択問題) 次の (a) と (b) のいずれかの問題を選び回答せよ.

(a) A を $m \times n$ 実行列とする. 連立方程式の解 (全体) の空間

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

が $\mathbb{R}^n$ の部分空間になることを示せ.

(b) V を実ベクトル空間とし, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ を V の基底とする. V の元 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ が

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3, \quad \mathbf{y}_2 = -\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3$$

を満たすとき, $a\mathbf{y}_1 + b\mathbf{y}_2 + c\mathbf{y}_3 = \mathbf{0}$ を満たす実数の組 $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ を全て求めよ.

選択した問題：$\boxed{}$ ((a) または (b) を記入すること)

解答)

$\boxed{3}$ (1) 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & -6 & 4\end{pmatrix}$ に対し, 連立方程式の解空間 $W=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; A\mathbf{x}=\mathbf{0}\right\}\subset\mathbb{R}^4$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \mathbf{a}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbf{a}_5=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\\6\end{pmatrix}$ に対し,

(a) 1 次独立なベクトルの最大個数 r を求めよ.

(b) r 個の 1 次独立なベクトルを $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_5$ のうち, 前から順に求め, 他のベクトルをそれらの 1 次結合として表せ.

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}[x]_2$ を実数を係数とする 2 次以下の多項式全体のなすベクトル空間とする.

(1) 多項式 $f_1=1+2x+3x^2, f_2=1+x+2x^2, f_3=2-2x+x^2$ が $\mathbb{R}[x]_2$ の基底になることを示せ.

(2) 前問の f_1,f_2,f_3 に対し, 次を満たす実数 a,b,c の値を求めよ.

$$2+3x+4x^2=af_1+bf_2+cf_3$$

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2019/la2.html