期末試験準備問題

$\boxed{1}$ (1) 可換環 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, 11\}$ の零因子の集合を求めよ．また $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ において 13 の逆元を求めよ．

(2) $\mathbb{Z}$ の剰余環

$$R_1 = \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}, \qquad R_2 = \mathbb{Z}/29\mathbb{Z}, \qquad R_3 = \mathbb{Z}/39\mathbb{Z}, \qquad R_4 = \mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$$

のなかから整域をすべてあげよ．

(3) 多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ の剰余環

$$R_5 = \mathbb{Q}[x]/(x^2-1), \qquad R_6 = \mathbb{Q}[x]/(x^2-2), \qquad R_7 = \mathbb{Q}[x]/(x^2-3), \qquad R_8 = \mathbb{Q}[x]/(x^2-4)$$

のなかから体をすべてあげよ．

(4) 剰余環 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ において $(x+1)^9$ を計算せよ．

(5) $\Phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ を (多項式環の) 環準同型写像とする．Φ が $\Phi(x) = x - 1$ を満たすとき，$\Phi(x^2 - x + 1)$ を求めよ．

(6) 体 K' が体 K の拡大体のとき K' の K 上の拡大次数を $[K' : K]$ で表す．有理数体 $\mathbb{Q}$ の拡大体 K_1, K_2, K_3, K_4 を

$$K_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \qquad K_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \qquad K_3 := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \qquad K_4 := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2})$$

で定める．次を求めよ．

(a) $[K_1 : \mathbb{Q}]$　(b) $[K_2 : K_1]$　(c) $[K_2 : \mathbb{Q}]$　(d) $[K_3 : \mathbb{Q}]$　(e) $[K_4 : \mathbb{Q}]$

(7) 次の元 α の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ を求めよ．

(a) $\alpha = -3 + \sqrt{5}$　(b) $\alpha = \dfrac{11 - \sqrt{61}}{6}$　(c) $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt[3]{2}}{2}$　(d) $\alpha = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ 次の多項式 $f(x)$ と $g(x)$ に対し，<u>拡張されたユークリッドの互除法を用いて</u>$f(x)$ と $g(x)$ の最大公約式 $d(x) = \mathrm{GCD}(f(x), g(x))$，および等式

$$a(x)f(x) + b(x)g(x) = d(x)$$

を満たす多項式 $a(x)$ と $b(x)$ の組 $(a(x), b(x))$ を 1 つ与えよ．

(1) $f(x) = x^3 - x - 1$, $g(x) = x^2 - 2x - 1$

(2) $f(x) = x^4 - 4x^2 + x + 2$, $g(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

$\boxed{3}$ 次の代数的な元 α に対し，$\mathbb{Q}$ の拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ を考える．与えられた α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式 $(\in \mathbb{Q}[\alpha])$ の形で表せ．ただし，多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ 未満で答えよ．

(1) $\alpha = 1 + \sqrt{10}, \quad f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha + 1}$

(2) $\alpha = \sqrt[3]{2}, \quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 - 2}$

(3) $\alpha = \sqrt{3} + 1, \quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 - 3}$

(4) $\alpha = -2 + \sqrt{3}, \quad f(\alpha) = \dfrac{-\alpha + 1}{\alpha^2 + 2}$

(5) $\alpha = \sqrt[3]{3}, \quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 + \alpha}$

$\boxed{4}$ 多項式 $f(x)$ と $g(x)$ を $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$ と定める.

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約式 $\mathrm{GCD}(f(x), g(x))$ を求めよ.

(2) 前問 (1) の最大公約式を $d(x)$ とおく. 等式 $a(x)f(x) + b(x)g(x) = d(x)$ を満たす多項式 $a(x)$ と $b(x)$ の組 $(a(x), b(x))$ を 1 つ与えよ.

(3) $\begin{cases} h(x) \equiv x \pmod{f(x)} \\ h(x) \equiv x + 1 \pmod{g(x)} \end{cases}$ を満たす多項式 $h(x)$ を求めよ.

$\boxed{5}$ 次を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ. (多項式 $f(x)$ に関する連立合同方程式を解け.)

(1) $\begin{cases} f(x) \equiv x \pmod{x^2 - 2x} \\ f(x) \equiv x + 1 \pmod{x^2 + 1} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} f(x) \equiv x \pmod{x^2 + 1} \\ f(x) \equiv x + 1 \pmod{x^2 + 2} \\ f(x) \equiv x + 2 \pmod{x^2 + 3} \end{cases}$

[0]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2019/alg2.html