代数学２/体とガロア理論, 期末試験問題＆解答用紙

2020/1/15 担当：那須

学生証番号		氏名		点数	

- 答えには下線を引くなどし, わかりやすくすること. 途中の式や論理を欠いた解答, 字の粗末な解答, 答えがどれか判別つかない解答は, 減点の対象になる場合がある.

$\boxed{1}$ (**基本問題**) 空欄を埋めよ.

(1) 環 R を $R=\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ で定義する. R の零因子の集合は $\left\{\boxed{\text{ア}}\right\}$ である. (零因子である R の元をカンマ (,) で区切って解答せよ.) また R において, 5 の逆元は $5^{-1}=\boxed{\text{イ}}$ である.

(2) $\mathbb{Z}$ の剰余環

$$R_1=\mathbb{Z}/9\mathbb{Z},\qquad R_2=\mathbb{Z}/10\mathbb{Z},\qquad R_3=\mathbb{Z}/11\mathbb{Z},\qquad R_4=\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

のうちで整域は $\boxed{\text{ウ}}$ である (正しいものを全て選ぶこと).

(3) 多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ の剰余環

$$R_5=\mathbb{Q}[x]/(x^2),\qquad R_6=\mathbb{Q}[x]/(x^2+1),\qquad R_7=\mathbb{Q}[x]/(x^2-1),\qquad R_8=\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$$

のうちで体は $\boxed{\text{エ}}$ である (正しいものを全て選ぶこと).

(4) 剰余環 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ において $(x+1)^4$ を計算すると,

$$(x+1)^4=ax+b,\qquad a,b\in\mathbb{R}$$

と表せ, $a=\boxed{\text{オ}}$, $b=\boxed{\text{カ}}$ となる.

(5) 写像 $\Phi:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ が環 $\mathbb{R}[x]$ から自分自身への準同型写像であり, $\Phi(x)=x+1$ を満たせば, $\Phi(x^2+x+1)=\boxed{\text{キ}}$ である.

(6) 体 K' が体 K の拡大体のとき K' の K 上の拡大次数を $[K':K]$ で表す. 有理数体 $\mathbb{Q}$ の拡大体 K_1,K_2,K_3,K_4 を

$$K_1:=\mathbb{Q}(\sqrt{3}),\qquad K_2:=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}),\qquad K_3:=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}),\qquad K_4:=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3},\sqrt[6]{3})$$

で定めるとき, $[K_1:\mathbb{Q}]=\boxed{\text{ク}}$, $[K_2:K_1]=\boxed{\text{ケ}}$, $[K_2:\mathbb{Q}]=\boxed{\text{コ}}$, $[K_4:K_3]=\boxed{\text{サ}}$ となる.

(7) $\mathbb{Q}$ 上代数的元 α と β を

$$\alpha=\frac{-5-\sqrt{13}}{2},\qquad \beta=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

により定める. α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $f_\alpha(x)=\boxed{\text{シ}}$ であり, β の最小多項式は $f_\beta(x)=\boxed{\text{ス}}$ である.

解答欄:

ア：		イ	
ウ：		エ：	
オ：	カ：　.	キ：	
ク：	ケ：	コ：	サ：
シ：		ス：	

$\boxed{2}$ $f(x)=x^3-2x^2+2$ と $g(x)=x^2-1$ とする. **拡張されたユークリッドの互除法を用いて**, $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約式 $d(x)=\mathrm{GCD}(f(x),g(x))$ を求め, 等式

$$a(x)f(x)+b(x)g(x)=d(x)$$

を満たす多項式 $a(x)$ と $b(x)$ の組 $(a(x),b(x))$ を 1 つ与えよ.

$\boxed{3}$ 次の元 α に対し, $\mathbb{Q}$ の拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ を考える. 与えられた α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式 $(\in \mathbb{Q}[\alpha])$ の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

(1) $\alpha = 1-\sqrt{2}, \quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2+\alpha+1}$

(2) $\alpha = \sqrt[3]{2}, \quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2-\alpha}$

$\boxed{4}$ 多項式 $f(x)$ と $g(x)$ を $f(x) = x-1$, $g(x) = x^2-x+2$ と定める.

(1) **拡張されたユークリッドの互除法を用いて**, 等式 $a(x)f(x)+b(x)g(x) = 1$ を満たす多項式 $a(x)$ と $b(x)$ の組 $(a(x), b(x))$ を 1 つ与えよ.

(2) $\begin{cases} h(x) \equiv 1 \pmod{f(x)} \\ h(x) \equiv x+1 \pmod{g(x)} \end{cases}$ を満たす多項式 $h(x)$ を求めよ. (多項式 $h(x)$ に関する連立合同方程式を解け.)

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2019/alg2.html