

中間レポート問題

- 下記の注意をよく読み, 以下の問題の解答をレポート用紙 (A4 サイズ・ホッチキスなどで閉じる) にまとめ, **2019年11月22日(金)16:00**までに理学部事務室横のレポートボックスに提出しなさい.

1 \mathbb{R} 上の1変数多項式環 $R = \mathbb{R}[x]$ において,

$$I = \{f(x) \in R \mid f(1) = 0\}$$

が R のイデアルになることを示せ. また

$$J = \{f(x) \in R \mid f(1) = 1\}$$

が R のイデアルにならないことを示せ.

2 R を環とし, I を R のイデアルとする. I に関する剰余類の集合 $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$ において

$$(a + I)(b + I) := ab + I$$

により積を定義すると, 矛盾なく定義される (well-defined) ことを示せ. (すなわち, 代表元 a, b の取り方に寄らず積が定義されることを示せ.)

3 $\mathbb{R}[x]$ を実数体 \mathbb{R} 上の1変数多項式環とし, \mathbb{C} を複素数体とする.

(1) i は虚数単位 ($= \sqrt{-1}$) を表す. $\mathbb{R}[x]$ から \mathbb{C} への写像 Φ を

$$\Phi(f(x)) = f(i), \quad f(x) \in \mathbb{R}[x]$$

により定義する. Φ が $\mathbb{R}[x]$ から \mathbb{C} への環準同型写像であることを示せ.

(2) Φ の核を $\ker \Phi$ で表す. 多項式 $x^2 + 1$ により生成される $\mathbb{R}[x]$ のイデアルを I とする (すなわち, $I = (x^2 + 1)$). 等式

$$\ker \Phi = I$$

を示せ.

(3) 準同型定理を用いて, 剰余環 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ と \mathbb{C} が同型であることを示せ.

—— 注意点 (良く読んで解答すること) ——

- 他人のレポートを明らかに写したと判断される場合には, 写したものの写させたものを問わず, 評価を0点とする.
- 問題を他の受講者と共同で考え, 解答を作成する場合には, 必ず解答を理解した上で, 自分自身で答案を作成すること. 後日答案内容に関する問合せをする場合もある.
- 図書・文献・Webなどを参照し解答する場合には, 参照した図書やページを明らかにすること.
- 締切は厳守すること. 締切を過ぎて提出されたレポートは原則として受けつけない.

⁰※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2019/alg2.html>