1.6 対称群と置換群

§1.3 で見たように, 集合 $X \neq \emptyset$ に対し, X から X 自身への全単射の集合 $B(X)$ は, 写像の合成に関し群になる.

定義 1.11. 集合 X が $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ のとき, $B(X) = B(\{1, 2, \ldots, n\})$ を n 次対称群と呼び, 記号 S_n で表す.

例 1.12. $n = 5$ とする. $f \in B(X)$ が X の元 $1, 2, 3, 4, 5$ をそれぞれ $4, 1, 3, 5, 2$ に写すとき, すなわち $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 2$ のとき,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

と表す (上段がもとの数字, 下段が写ったあとの数字を表す).

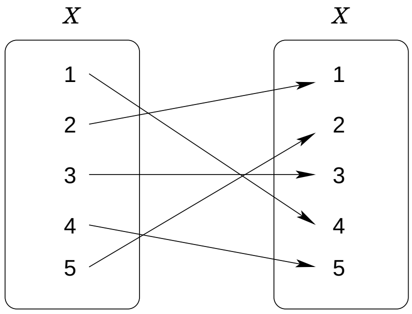

図 1: 対称群 S_5 の元 f

一般に対称群の元には σ, τ, ρ などのギリシャ文字が使われることが多い. n 次対称群 S_n の一般元 σ は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

のように表される. $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ は 1 から n までの数字で, 互いに異なる ($i \neq j$ ならば $\sigma(i) \neq \sigma(j)$). 対称群 S_n の元を n 次置換と呼び, S_n の部分群を置換群という.

例 1.13. (1) 2 次対称群 S_2 の元は次のいずれかである：

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 3 次対称群 S_3 の元は次のいずれかである：

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

S_n の元の個数は $n!(= 1 \cdot 2 \cdots n)$ に等しい. $n = 2$ のとき 2 個, $n = 3$ のとき 6 個, $n = 4$ のとき 24 個, ... となる.

☆置換の積　n 次の置換 $\sigma, \tau \in S_n$ に対し, 積 $\tau\sigma \in S_n$ を

$$i \in \{1, 2, \ldots, n\} \longmapsto \tau(\sigma(i)) \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

により定義する.

例 1.14. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ である.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \sigma & & \tau & & \qquad & & \tau\sigma & \\ 1 & \longmapsto & 3 & \longmapsto & 2 & & (1 & \longmapsto & 2) \\ 2 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & 1 & & (2 & \longmapsto & 1) \\ 3 & \longmapsto & 2 & \longmapsto & 3 & & (3 & \longmapsto & 3) \end{array}$$

さらに記号を用いずに,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

のように書く.

☆恒等置換　n 次置換 $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ を恒等置換という. 任意の $\sigma \in S_n$ に対し, $e\sigma = \sigma e = \sigma$ を満たし, S_n の単位元となる.

☆逆置換　置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ の上段と下段の数字を入れ替えた置換を σ の逆置換といい, σ^{-1} で表す. $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$ を満たし, σ の S_n における逆元となる.

例 1.15. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆置換は, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ に等しい. 同様に

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

のようにも書く.

言い換えれば, n 次の置換全体 S_n は, 写像の合成を積 (演算) に定めれば, 恒等置換を単位元, 逆置換を逆元とする群になる.

問題 1.16. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とする. このとき次を計算せよ.

(1) $\tau\sigma$　(2) $\sigma\tau$　(3) σ^2　(4) σ^{-1}　(5) $\sigma^{-1}(3)$　(6) σ^{-2}

[0]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2012/gt.html