離散フーリエ変換と逆変換

コンピュータ代数 1 (東海大学情報数理学科, 2011 年 7 月 8 日, 担当：那須)

定義 1 (1 の累乗根). 自然数 N に対し,

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{N}} = \cos\frac{2\pi}{N} + i\sin\frac{2\pi}{N}$$

を 1 の**原始 N 乗根**という.

定義 2 (離散フーリエ変換と逆変換). ζ を 1 の原始 N 乗根 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ とする. N 項の数列 $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ に対し,

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \zeta^{-nk}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

で定まる N 項の数列 $\{X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}\}$ を対応させる変換を, **離散フーリエ変換**という. N 項の数列 $\{X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}\}$ に対し,

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \zeta^{nk}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

で定まる N 項の数列 $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ を対応させる変換を, **離散フーリエ逆変換**という.

例題 1. (1) 数列 $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{1, 0, 1, 1\}$ の離散フーリエ変換 $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ を求めよ.

(2) 前問で求めた $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ に離散フーリエ逆変換を施すことにより, もとの数列 $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{1, 0, 1, 1\}$ を復元せよ.

解) 1 の原始 4 乗根は,

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{4}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ より,

$$i^n = \begin{cases} 1 & (n = 4m) \\ i & (n = 4m+1) \\ -1 & (n = 4m+2) \\ -i & (n = 4m+3) \end{cases} \quad (\text{ただし } m \text{ は整数}).$$

(1) $0 \le k \le 3$ に対し,

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{3} x_n \zeta^{-nk} \\ &= x_0\zeta^0 + x_1\zeta^{-k} + x_2\zeta^{-2k} + x_3\zeta^{-3k} \\ &= 1 \times i^0 + 0 \times i^{-k} + 1 \times i^{-2k} + 1 \times i^{-3k} \\ &= 1 + i^{-2k} + i^{-3k} \\ &= 1 + (i^{-2})^k + (i^{-3})^k \\ &= 1 + (-1)^k + i^k \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 + (-1)^0 + i^0 = 1 + 1 + 1 = 3, \\ X_1 &= 1 + (-1)^1 + i^1 = 1 - 1 + i = i, \\ X_2 &= 1 + (-1)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 = 1, \\ X_3 &= 1 + (-1)^3 + i^3 = 1 - 1 - i = -i. \end{aligned}$$

よって $\underline{\{X_0, X_1, X_2, X_3\} = \{3, i, 1, -i\}}$.

(2) $\{X_0, X_1, X_2, X_3\} = \{3, i, 1, -i\}$ に離散フーリエ逆変換を施せば, $0 \le n \le 3$ に対し,

$$\begin{aligned} \hat{x}_n &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X_k \zeta^{nk} \\ &= \frac{1}{4}(X_0\zeta^0 + X_1\zeta^n + X_2\zeta^{2n} + X_3\zeta^{3n}) \\ &= \frac{1}{4}(3 \times i^0 + i \times i^n + 1 \times i^{2n} + (-i) \times i^{3n}) \\ &= \frac{1}{4}(3 + i^{n+1} + i^{2n} - i^{3n+1}). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \frac{1}{4}(3 + i^{0+1} + i^{2\times 0} - i^{3\times 0+1}) = \frac{1}{4}(3 + i + 1 - i) = 1, \\ \hat{x}_1 &= \frac{1}{4}(3 + i^{1+1} + i^{2\times 1} - i^{3\times 1+1}) = \frac{1}{4}(3 - 1 - 1 - 1) = 0, \\ \hat{x}_2 &= \frac{1}{4}(3 + i^{2+1} + i^{2\times 2} - i^{3\times 2+1}) = \frac{1}{4}(3 - i + 1 + i) = 1, \\ \hat{x}_3 &= \frac{1}{4}(3 + i^{3+1} + i^{2\times 3} - i^{3\times 3+1}) = \frac{1}{4}(3 + 1 - 1 + 1) = 1. \end{aligned}$$

よって元の数列 $\{1, 0, 1, 1\}$ に戻った.

例題 2. (1) 数列 $\{x_0, x_1, x_2\} = \{1, 0, 1\}$ の離散フーリエ変換 $\{X_0, X_1, X_2\}$ を求めよ.

(2) 前問で求めた $\{X_0, X_1, X_2\}$ に離散フーリエ逆変換を施すことにより, もとの数列 $\{x_0, x_1, x_2\} = \{1, 0, 1\}$ を復元せよ.

解) 1 の原始 3 乗根は,

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

$\omega^3 = 1$ より, 次を満たす：

$$\begin{aligned}
&\omega^0 = 1,\\
&\omega^{-1} = \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\\
&\omega^{-2} = \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\\
&1+\omega+\omega^2 = 0.
\end{aligned}$$

(1) $0 \leq k \leq 2$ に対し,

$$\begin{aligned}
X_k &= \sum_{n=0}^{2} x_n\omega^{-nk} = x_0\omega^0 + x_1\omega^{-k} + x_2\omega^{-2k}\\
&= 1\times\omega^0 + 0\times\omega^{-k} + 1\times\omega^{-2k} = 1+\omega^{-2k}.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
X_0 &= 1+\omega^{-2\times 0} = 1+1 = 2,\\
X_1 &= 1+\omega^{-2\times 1} = 1+\omega^{-2}\\
&= 1+\omega = -\omega^2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\\
X_2 &= 1+\omega^{-2\times 2} = 1+\omega^{-4}\\
&= 1+\omega^2 = -\omega = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\underline{\{X_0, X_1, X_2\}} &= \underline{\{2, -\omega^2, -\omega\}}\\
&= \underline{\left\{2, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right\}}.
\end{aligned}$$

(2) $\{X_0, X_1, X_2\} = \left\{2, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$ に離散フーリエ逆変換を施せば, $0 \leq n \leq 2$ に対し,

$$\begin{aligned}
\hat{x}_n &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} X_k\omega^{nk}\\
&= \frac{1}{3}(X_0\omega^0 + X_1\omega^n + X_2\omega^{2n})\\
&= \frac{1}{3}(2\times\omega^0 - \omega^2\times\omega^n - \omega\times\omega^{2n}\\
&= \frac{1}{3}(2-\omega^{n+2}-\omega^{2n+1}).
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\hat{x}_0 &= \frac{1}{3}(2-\omega^{0+2}-\omega^{2\times 0+1}) = \frac{1}{3}(2-\omega^2-\omega)\\
&= \frac{1}{3}(2-(-1)) = 1,\\
\hat{x}_1 &= \frac{1}{3}(2-\omega^{1+2}-\omega^{2\times 1+1}) = \frac{1}{3}(2-\omega^3-\omega^3)\\
&= \frac{1}{3}(2-1-1) = 0,\\
\hat{x}_2 &= \frac{1}{3}(2-\omega^{2+2}-\omega^{2\times 2+1}) = \frac{1}{3}(2-\omega^4-\omega^5)\\
&= \frac{1}{3}(2-\omega-\omega^2) = \frac{1}{3}(2-(-1)) = 1.
\end{aligned}$$

よって元の数列 $\{1, 0, 1\}$ に戻った.

問題 1. (1) 数列 $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{1, 1, 0, 1\}$ の離散フーリエ変換 $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ を求めよ.

(2) 前問で求めた $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ に離散フーリエ逆変換を施すことにより, もとの数列 $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{1, 1, 0, 1\}$ を復元せよ. (計算により復元されることを示せ.)

問題 2. (1) 数列 $\{x_0, x_1, x_2\} = \{2, 0, 2\}$ の離散フーリエ変換 $\{X_0, X_1, X_2\}$ を求めよ.

(2) 前問で求めた $\{X_0, X_1, X_2\}$ に離散フーリエ逆変換を施すことにより, もとの数列 $\{x_0, x_1, x_2\} = \{2, 0, 2\}$ を復元せよ. (計算により復元されることを示せ.)

[0] ※この講義に関する情報は次の Web サイトを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2011/ca1.html