Obstructions to deforming space curves and a remark to a conjecture of Kleppe *

那須弘和 (Hirokazu Nasu) †

1 序文

3 次元射影空間内に埋め込まれた曲線を**空間曲線**と呼ぶ．空間曲線の分類は古典的な問題であり, 19 世紀の終わりには既に研究されていた ([6],[14])．[7] に書かれているように, 近年ではヒルベルトスキームの存在によりその理論的側面は良く理解されているが, より特定の問題, 例えば次数 d, 種数 g の曲線をパラメータ付ける閉部分スキームの次元や既約性, 特異性に関しては, 多くの d と g に対しまだ未解決のままである．本報告では, 空間曲線の変形理論について知られている結果を整理するとともに, 空間曲線のヒルベルトスキームの非被約成分に関するある予想 (Kleppe-Ellia 予想) に関する研究の進展について紹介する．本報告では非特異連結空間曲線のヒルベルトスキームを $H^S_{\mathbb{P}^3}$, 次数 d, 種数 g の曲線からなる $H^S_{\mathbb{P}^3}$ の部分スキームを $H^S_{d,g}$ により表す．($H^S_{\mathbb{P}^3} = \prod_{d,g} H^S_{d,g}$.)

2 空間曲線の変形

この節では空間曲線の変形に関する基本事項を復習するとともに, カップ積を用いた 1 位無限小変形に対する障害類の計算法について学ぶ．空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ に対し, 法束 $N_{C/\mathbb{P}^3}$ のコホモロジー群 $H^0(N_{C/\mathbb{P}^3})$ と $H^1(N_{C/\mathbb{P}^3})$ は, それぞれヒルベルトスキーム $H^S_{\mathbb{P}^3}$ の点 $[C]$ における**接空間**と**障害空間**になる．つまり C の 1 位無限小変形 $\tilde{C} \subset \mathbb{P}^3 \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ 全体と $H^0(N_{C/\mathbb{P}^3})$ の間に自然な 1 対 1 対応が存在する．接空間と障害空間のベクトル空間としての次元の差はオイラー数 $\chi(N_{C/\mathbb{P}^3}) = 4d$ (ただし d は曲線の次数) に等しい．この数は $H^S_{\mathbb{P}^3}$ の**期待次元**と呼ばれ, 一般に不等式

$$\chi(N_{C/\mathbb{P}^3}) \le \dim_{[C]} H^S_{\mathbb{P}^3} \le h^0(N_{C/\mathbb{P}^3})$$

が成り立つ．$H^1(N_{C/\mathbb{P}^3}) = 0$ のときは, $H^S_{\mathbb{P}^3}$ は点 $[C]$ において非特異かつ期待次元 $4d$ をもつ．$H^1(N_{C/\mathbb{P}^3}) \neq 0$ のときは, 一般に C の 1 位無限小変形は大域的な変形にリフトしない．後に述べるが, コホモロジーのカップ積による障害類の計算が有効なのは, この場合である．

---

*研究集会『射影多様体の幾何とその周辺 2009』(平成 21 年 11 月 21 日〜23 日, 高知大学) 報告
†東京電機大学情報環境学部

4 変数の次数付多項式環 $S = k[x, y, z, w]$ を $\mathbb{P}^3$ の斉次座標環とし, 空間曲線 C のイデアル層を $\mathcal{I}_C$ で表す. C に対し S 上の次数付き加群

$$M_C = H^1_*(\mathcal{I}_C) = \bigoplus_{l \geq 0} H^1(\mathcal{I}_C(l))$$

は C の **Hartshorne-Rao 加群**と呼ばれる. $M_C = 0$ のとき C は数値的に Cohen-Macaulay (arithmetically Cohen-Macaulay, ACM と略す) であると云う. C が ACM であることと, C が射影的正規 (projectively normal) である, すなわちすべての整数 l に対し, コホモロジーの制限写像 $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(l)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(l))$ が全射になることは同値である. ヒルベルトスキーム $H^S_{\mathbb{P}^3}$ が対応する点 $[C]$ において非特異であるとき, C は**障害を受けない (unobstructed)** と云い, そうでないとき, すなわち特異であるとき, C は**障害を受ける (obstructed)** と云う. 全ての ACM 曲線は unobstructed であり, 次が知られている.

定理 2.1 (Ellingsrud [3])**.** ACM 曲線の全体は $H^S_{\mathbb{P}^3}$ の <u>非特異</u> 開部分スキーム U をなす.

さらにイデアル層 $\mathcal{I}_C$ の resolution のタイプが固定されれば, U は既約になり $\dim U$ は $\mathcal{I}_C$ の Betti 数から計算できる (詳細は [3] を参照).

3 カップ積と障害類

$H^1(N_{C/\mathbb{P}^3}) \neq 0$ であっても, 空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ は obstructed とは限らない. 一般的に C の障害性を示すことは難しいが, 次に紹介するカップ積の計算を用いて示せる場合がある. 以下では C の 1 位無限小変形 $\tilde{C}$ と $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) \simeq H^0(N_{C/\mathbb{P}^3})$ の元 φ を同一視する. 短完全列 $0 \to \mathcal{I}_C \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_C \to 0$ の拡大類を $\mathbf{e} \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}_C)$ で表せば, $\tilde{C}$ が 2 位変形に持ち上がるためには, カップ積 $\varphi \cup \mathbf{e} \cup \varphi$ が零になることが必要十分である. このカップ積を**障害類**とよび $\mathrm{ob}(\varphi)$ で表す. 一般にこの障害類 (カップ積) を計算することは難しいが, Walter [15] は次の可換図式を用いた計算方法を提示した. 以下の図において $H^i_*(\mathcal{F})$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ は次数付 S-加群 $\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} H^i_*(\mathbb{P}^3, \mathcal{F}(l))$ を表す.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) & \times & \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_0(H^0_*(\mathcal{I}_C), H^0_*(\mathcal{O}_C)) & \times & \mathrm{Hom}_0(H^1_*(\mathcal{I}_C), H^1_*(\mathcal{O}_C)) & \to & \mathrm{Hom}_0(H^0_*(\mathcal{I}_C), H^1_*(\mathcal{O}_C)),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(\varphi, \varphi) & \mapsto & \varphi \cup \mathbf{e} \cup \varphi \\
\overline{\downarrow} & & \overline{\downarrow} \\
(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) & \mapsto & \overline{\varphi} \cup \mathbf{e} \cup \overline{\varphi}
\end{array}$$

最後のカップ積 $\overline{\varphi} \cup \mathbf{e} \cup \overline{\varphi}$ は, 短完全列 $[0 \to \mathcal{I}_C \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_C \to 0] \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(l)$ より定まる余境界写像 δ を間に挟んだ $\overline{\varphi}$ の自身との合成写像,

$$\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} \left[H^0(\mathcal{I}_C(l)) \xrightarrow{\overline{\varphi}} H^0(\mathcal{O}_C(l)) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{I}_C(l)) \xrightarrow{\overline{\varphi}} H^1(\mathcal{O}_C(l)) \right]$$

に等しい．カップ積 $\varphi \cup \mathbf{e} \cup \varphi$ の代わりに $\overline{\varphi} \cup \mathbf{e} \cup \overline{\varphi}$ を計算するひとつの理由は, その計算のし易さにある．C の斉次イデアル $I_C = H^0_*(\mathcal{I}_C)$, 斉次座標環 $R_C = H^0_*(\mathcal{O}_C)$, Hartshorne-Rao 加群 $M_C = H^1_*(\mathcal{I}_C)$ の適当な l 次成分において $\overline{\varphi}$ や δ を計算し, カップ積 $\overline{\varphi} \cup \mathbf{e} \cup \overline{\varphi} \neq 0$ (従って $\mathrm{ob}(\varphi) \neq 0$ を) を示す．論文 [4], [10], [9] では, この方法により空間曲線の変形障害が計算された．空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ の斉次イデアル I_C の解消

$$0 \longrightarrow \bigoplus S(-i)^{\beta_{3,i}} \longrightarrow \bigoplus S(-i)^{\beta_{2,i}} \longrightarrow \bigoplus S(-i)^{\beta_{1,i}} \longrightarrow I_C \longrightarrow 0$$

が与えられたとき, 次の事実が知られている．

定理 3.1 (Kleppe[9])**.** C の Hartshorne-Rao 加群 M_C が, ある自然数 m に対し

$$(M_C)_m \neq 0 \quad \text{かつ} \quad (M_C)_l = 0 \quad (l \neq m) \tag{3.1}$$

を満たすと仮定する．このとき, C が obstructed となる為の必要十分条件は

$$\beta_{1,m} \cdot \beta_{2,m+4} \neq 0, \quad \text{または} \quad \beta_{1,m+4} \cdot \beta_{2,m+4} \neq 0, \quad \text{または} \quad \beta_{1,m} \cdot \beta_{2,m} \neq 0$$

である． □

定理の仮定 (3.1) は C が Buchsbaum であることを意味する．一般に曲線 C が Buchsbaum であるとは, 無縁イデアルと Rao 加群との積が零になる, すなわち $(x, y, z, w) \cdot M_C = 0$ であることを云い, Buchsbaum 曲線は ACM 曲線に近い性質を持つ曲線として知られている．空間曲線 C が of maximal rank であるとは, 任意の整数 l に対し制限写像 $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(l)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(l))$ が全射または単射であることを云い, maximal rank curve は空間曲線の一つの良いクラスである．次の例 (例 3.2) は Sernesi の問「maximal rank curve C は全て unobstructed か？」に対する否定的な解答を与えるために構成された．すなわち maximal rank かつ obstructed な曲線が存在する．

例 3.2 (Bolondi-Kleppe-Miró-Roig [1], Walter [15])**.** 次数 33, 種数 117 の曲線 C で次のタイプの解消を持つものが存在する:

$$0 \longrightarrow S(-9) \longrightarrow S(-10)^2 \oplus S(-9) \oplus S(-8)^4 \longrightarrow S(-9) \oplus S(-8) \oplus S(-7)^5 \longrightarrow I_C \longrightarrow 0.$$

このとき $M_C = (M_C)_5 \simeq k$ および $\beta_{1,9} \cdot \beta_{2,9} = \beta_{1,5+4} \cdot \beta_{2,5+4} = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$ が成り立つ．従って定理 3.1 により, C は obstructed である．

4 3-fold 上の曲線の 1 位無限小変形に対する障害性判定法

論文 [11] では, 曲線 C を含む多様体を 3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ から一般の非特異 3 次元射影多様体 V に一般化し, C と V の間の中間曲面 S $(C \subset S \subset V)$ と S 上の第一種例外曲線 E を用いて, C の V 内における変形障害が研究された．特に C の V 内のおける 1 位無限小変形が障害を受ける為のひとつの十分条件 (障害性判定法) が与えられた．この節ではその障害性判定法の概略について紹介する．

C の V 内における 1 位無限小変形 $\tilde{C}$ は, 空間曲線のときと同様に法束 $N_{C/V}$ の大域切断 $\alpha \in H^0(N_{C/V})$ と, $\tilde{C}$ が 2 位変形にリフトする為の障害 $\mathrm{ob}(\alpha) \in H^1(N_{C/V})$ を定める. 法束の自然な射影 $\pi_{C/S} : N_{C/V} \to N_{S/V}\big|_C$ はコホモロジー群の写像 $H^i(\pi_{C/S}) : H^i(N_{C/V}) \to H^i(N_{S/V}\big|_C)$ $(i = 0, 1)$ を誘導する. この写像による α と $\mathrm{ob}(\alpha)$ の像を, それぞれの**外成分 (exterior component)** と呼び, それぞれ記号 $\pi_{C/S}(\alpha)$ と $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ で表す [11, 定理 2.2] では, 外成分と S 上の第一種例外曲線 E を用いて, $\mathrm{ob}(\alpha) \neq 0$ が示された.

以下に定理の仮定を説明する. α の外成分 $\pi_{C/S}(\alpha) \in H^0(C, N_{S/V}\big|_C)$ が $N_{S/V}$ の大域切断にはリフトしないが, E に極を許した $N_{S/V}(E)$ の大域切断 v にリフトすると仮定する. すなわち $\pi_{C/S}(\alpha) = v\big|_C \in H^0(N_{S/V}(E)\big|_C)$. さらに v を E に制限した切断 $v\big|_E \in H^0(E, N_{S/V}(E)\big|_E)$ が写像 $\pi_{E/S}(E) : H^0(E, N_{F/V}(E)) \longrightarrow H^0(E, N_{S/V}(E)\big|_E)$ の像に含まれないと仮定する. 仮定が複雑なので, 次の図式を使って α と v の関係を理解して頂きたい.

$$\begin{tikzcd}
H^0(C, N_{C/V}) \arrow[d, "\pi_{C/S}"] & \ni & \alpha \arrow[d] & & & & H^0(E, N_{E/V}(E)) \arrow[d, "\pi_{E/S}(E)"] \\
H^0(C, N_{S/V}\big|_C) \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & \ni & v\big|_C & v \arrow[l, mapsto, "\text{制限}"'] \arrow[r, mapsto, "\text{制限}"] \arrow[d, phantom, "\Cap"] & v\big|_E & \in & H^0(E, N_{S/V}(E)\big|_E) \\
H^0(C, N_{S/V}(E)\big|_C) & & & H^0(S, N_{S/V}(E)) \arrow[lll, "res"'] & & &
\end{tikzcd}$$

図 1: α と v の間の関係

このとき次が成り立つ.

定理 4.1 ([11, 定理 2.2]). 次の条件が満たされるとき, α の障害類 $\mathrm{ob}(\alpha)$ の外成分 $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ はゼロでない：

(a) $(\Delta \cdot E)_S = 0$, ただし $\Delta := C - 2E + K_V\big|_S$ は S 上の因子;

(b) 制限写像 $H^0(S, \Delta) \to H^0(E, \Delta\big|_E) \overset{(a)}{\simeq} H^0(E, \mathcal{O}_E) \simeq k$ が全射的.

つまり $\alpha \in H^0(N_{C/V})$ に対応する C の 1 位無限小変形 $\tilde{C}$ は 2 位変形にリフトしない. □

上の定理において曲線 E が既約であることは, あまり本質的でない. E が複数の第一種例外曲線 E_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ の非交差和 (disjoint union) のときも, 同様の定理が成り立つ. これを使う事により, 3 次曲面 $S_3 \subset \mathbb{P}^3$ ($\mathbb{P}^2$ の 6 点爆発 $\mathrm{Bl}_{P_1,\ldots,P_6}\mathbb{P}^2$ と同型) に含まれる空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ の変形障害を計算し, C が obstructed であることを示す事ができる (§6 参照).

5 Kleppe-Ellia 予想

空間曲線の中でも特に 3 次曲面に含まれる空間曲線に関しては多くの研究がある (例えば [5],[8], [2],[13] など). その中でも特に非特異 3 次曲面に含まれる曲線に関しては, この曲面の豊かな性質の助けを借りて詳しい研究がされている. そこで次のような問題を考えてみたい.

問題 5.1. 非特異空間曲線のヒルベルトスキーム $H^S_{\mathbb{P}^3}$ の既約成分のうち, その一般元が非特異 3 次曲面に含まれるものを (3 次曲面の因子類から定まる 7 整数の組 $(a; b_1, b_2, \dots, b_6)$ を用いて) 全て分類せよ.

この問題は古くは Kleppe [8] により研究された. 次数 d, 種数 g の曲線をパラメータづける $H^S_{\mathbb{P}^3}$ の部分スキームを $H^S_{d,g}$ で表す. W を $H^S_{d,g}$ の既約閉部分集合であり, なおかつその一般元 C が非特異 3 次曲面に含まれるようなもののうちで極大と仮定する. すなわちもし $W \subsetneq V$ なる $H^S_{d,g}$ の既約閉部分集合 V が存在すれば, V の一般元は 3 次曲面に含まれないと仮定する. 次の Kleppe の予想を証明すれば, 上の問題に対する解答が得られる：

予想 5.2 (Kleppe [8, Conjecture 4])**.** $d > 9$ と $g \geq 3d - 18$ を 2 つの整数, $W \subset H^S_{d,g}$ と C を上のように定義する. このとき次が成り立つ.

(1) W は $(H^S_{d,g})_{\mathrm{red}}$ の既約成分である.

(2) $H^S_{d,g}$ は W に沿って生成的に非特異 $\iff H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 0$. □

もし W が $H^S_{d,g}$ の既約成分であれば, $g \geq 3d - 18$ であることがすぐわかる (注意 6.2 (3) を参照). Ellia [2] は W の一般元 C が線形正規 ($\Leftrightarrow H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(1)) = 0$) でないとき予想の結論 (1) が正しくない事を指摘し, 予想の対象を線形正規な曲線 C に制限する事を提言した. 予想 5.2 は次の場合に正しい事が示されたが, 予想全体はまだ未解決である.

[i] $d \leq 17$ かつ $g > -1 + (d^2 - 4)/8$ (Kleppe [8]);

[ii] $d \geq 18$ かつ $g > 7 + (d-2)^2/8$ (Kleppe [8]);

[iii] $d \geq 38$ かつ $g > (d^2 - 4d + 8)/8$ (Ellia [2]);

[iv] $d \geq 21$, $g > G(d, 5)$, さらに C が線形正規 (Ellia [2]);

[v] $h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 1$ (Nasu [13]).

ここで $G(d, 5)$ はどんな 4 次曲面にも含まれないような d 次空間曲線の最大種数を表す.

近年の空間曲線や 3 次元多様体上の曲線の変形障害に関する研究の進展により, 次の結果が得られたので報告する.

定理 5.3. $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(l)) = 0$ $(l = 1, 2)$ のとき, 予想 5.2 は正しい.

線形正規の定義と同様に, 空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ が $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2)) = 0$ を満たすとき, C は **2 次正規である (quadratically normal)** と定義すれば, つまり予想が線形正規かつ 2 次正規の場合に正しい事がわかった.

C を予想 5.2 における一般の曲線とする. C が 2 次正規であることは, 3 次曲面上の直線との交点数を用いて次のように言い代えることが出来る. 次数に関する仮定 $d > 9$ により, C を含む 3 次曲面 S は唯一に定まる. 次節 (§6) で述べるが, C が線形正規かつ 2 次正規であることと, S 上の全ての直線 E に対し $C \cdot E \geq 2$ が成り立つ事は同値である.

6　3 次曲面に含まれる空間曲線の族

予想 5.2 や定理 5.3 について良く理解する為にまず, 非特異 3 次曲面 S 上の曲線の基本事項をおさらいする. よく知られているように, S は $\mathbb{P}^2$ の一般の 6 点における爆発と同型である (6 点は円錐曲線に含まれず, どの 3 点も同一直線上に無い). 6 個の例外曲線 e_i $(1 \le i \le 6)$ と $\mathbb{P}^2$ の直線の引き戻し l は S のピカール群 $\operatorname{Pic} S \simeq \mathbb{Z}^7$ の自由 $\mathbb{Z}$-基底をなす. 与えられた S 上の因子 D に対し, 因子類 $D = al - \sum_{i=1}^{6} b_i e_i$ の座標として, 7 整数の組 $(a; b_1, \ldots, b_6)$ を得る. このとき $\mathbb{E}_6$ 型ルート系に付随する Weyl 群 $W(\mathbb{E}_6)$ が $\operatorname{Pic} S$ 上に次のように作用する. ここで $W(\mathbb{E}_6)$ は e_i $(1 \le i \le 6)$ の置換と, もうひとつの特別な Cremona 元 σ により生成される. Cremona 元は $\mathbb{P}^2$ の Cremona 変換により引き起こされる $\operatorname{Pic} S$ の自己同型であり, 定義は $\sigma(l) = 2l - e_1 - e_2 - e_3$, $\sigma(e_1) = l - e_2 - e_3$, $\sigma(e_2) = l - e_1 - e_3$, $\sigma(e_3) = l - e_1 - e_2$, $\sigma(e_i) = e_i$ $(i \notin \{1, 2, 3\})$ で与えられる. $W(\mathbb{E}_6)$ の各元は $\operatorname{Pic} S$ の基底変換を誘導する. この Weyl 群と基底変換のおかげで, S 上の与えられた因子 D に対し, $\mathbb{P}^2$ の適当な爆発 $S \to \mathbb{P}^2$ が存在し,

$$b_1 \ge \cdots \ge b_6 \quad \text{かつ} \quad a \ge b_1 + b_2 + b_3 \tag{6.1}$$

が満たされる. 不等式 (6.1) が成り立つとき, $\operatorname{Pic} S$ の基底 $\{l, e_1, \ldots, e_6\}$ は D に対し**標準 (standard)** であるという. この標準基底に対し, S 上の完備線形系 $|D|$ が 2 次以上の非特異曲線 C をメンバーに持つ為の必要十分条件は, $a > b_1$ かつ $b_6 \ge 0$ と表される. さらに C の次数 d と種数 g は, それぞれ

$$d = 3a - \sum_{i=1}^{6} b_i, \qquad g = \binom{a-1}{2} - \sum_{i=1}^{6} \binom{b_i}{2}. \tag{6.2}$$

のように計算される.

逆に与えられた一対の整数の組 (d, g) $(d > 2)$ と式 (6.1), (6.2), $a > b_1$, $b_6 \ge 0$ を満たす 7 整数の組 $(a; b_1, \ldots, b_6)$ に対し, ヒルベルトスキーム $H^S_{d,g}$ の閉部分集合 $W_{(a;b_1,\ldots,b_6)}$ を次で定義する：

定義 6.1.

$$W_{(a;b_1,\ldots,b_6)} := \left\{ C \in H^S_{d,g} \;\middle|\; \begin{array}{c} C \text{ はある非特異 3 次曲面 } S \text{ に含まれ} \\ S \text{ 上で } C \sim al - \sum_{i=1}^{6} b_i e_i \text{ となる} \end{array} \right\}^{-}$$

を $H^S_{d,g}$ の 3-**極大集合** *(3-maximal subset)* とよぶ. ここで $\{\}^{-}$ は $\{\}$ の $H^S_{d,g}$ 内における閉包を表す.

注意 6.2. $d > 9$ を仮定し, $W = W_{(a;b_1,\ldots,b_6)}$ を $H^S_{d,g}$ を 3-極大集合とする. このときその構成から次がわかる：

(1) W は $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)| \simeq \mathbb{P}^{19}$ 上の $\mathbb{P}^{d+g-1}$-束に双有理同値である (ただし $d + g - 1 = \dim |\mathcal{O}_S(C)|$). 特に W は既約であり, 次元は $d + g + 18$ に等しい.

(2) W は一般元が非特異 3 次曲面に含まれるような $H^S_{d,g}$ の既約閉部分集合のうちで極大である. つまりもし $W' \supsetneqq W$ を満たす $H^S_{d,g}$ の既約閉部分集合 W' が存在すれば, W' の一般元 C' はどんな 3 次曲面にも含まれない

(3) ヒルベルトスキーム $H^S_{d,g}$ の既約成分の次元は $\chi(N_{C/\mathbb{P}^3}) = 4d$ 以上であることが知られている．よってもし W が $H^S_{d,g}$ の既約成分であれば, (1) より $g \geq 3d-18$ が成り立つ．

以下では $d > 9$ と $g \geq 3d-18$ を仮定する．$W \subset H^S_{d,g}$ を 3-極大集合とし, C を W の一般元とする．§2 で述べたように, コホモロジー群 $H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3})$ はヒルベルトスキームの点 $[C]$ における接空間を表し, 次元に関する次の不等式が成り立つ：

$$\dim W \leq \dim_{[C]} H^S_{d,g} \leq h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}). \tag{6.3}$$

この不等式により, 以下の補題を得る．

補題 6.3. (1) $H^S_{d,g}$ は $[C]$ において非特異 $\iff \dim_{[C]} H^S_{d,g} = h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3})$.

(2) W は $(H^S_{d,g})_{\mathrm{red}}$ の規約成分である $\iff \dim W = \dim_{[C]} H^S_{d,g}$.

さらに簡単な計算により

$$h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) - \dim W = h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)). \tag{6.4}$$

を示すことができる．したがって $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 0$ ならば,

$$\dim W = \dim_{[C]} H^S_{d,g} = h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3})$$

が得られ, 補題 6.3 より予想 5.2 の結論を得る．予想が自明でないのは $H^1(\mathcal{I}_C(3)) \neq 0$ のときである．

次にコホモロジー群 $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3))$ の次元を C の $\operatorname{Pic} S \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 7}$ における座標 $(a; b_1, \ldots, b_6)$ を用いて計算する．この次元は C を含む非特異 3 次曲面上の直線の幾何と深く関連している．まず最初に Mumford の有名な例 (ヒルベルトスキーム $H^S_{14,24}$ の生成的に被約でない既約成分の例) について思い出そう．

例 6.4 (Mumford [12])**.** $S \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 3 次曲面とし, h を S の超平面切断類, E を S 上の直線とする．このとき S 上の完備線形系 $|4h+2E|$ の一般元 C は, 次数 14, 種数 24 の非特異連結曲線となる．$\operatorname{Pic} S \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 7}$ における h の座標は $(3; 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ に等しいから, C の座標は $(12; 4, 4, 4, 4, 4, 2)$ に等しい．注意 6.2 (1) により 3-極大集合 $W_{(12;4,4,4,4,4,2)}$ の次元は $d+g+18 = 14+24+18 = 56$ に等しいが, 一方ヒルベルトスキームの接空間の次元は完全列 $0 \to N_{C/S} \to N_{C/\mathbb{P}^3} \to N_{S/\mathbb{P}^3}\big|_C \to 0$ を用いて $h^0(N_{C/\mathbb{P}^3}) = h^0(N_{C/S}) + h^0(N_{S/\mathbb{P}^3}\big|_C) = 37 + 20 = 57$ に等しい．したがって $h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 1$ と結論づけられる．ここで S 上の完備線形系 $\Lambda_3 := |C - 3h|$ を考えれば,

$$\Lambda_3 := |4h + 2E - 3h| = |h + 2E| = |h + E| + E$$

と分解し, $|h+E|$ は固定点自由 (base point free) となり, E は Λ_3 の固定因子 (fixed component) となる．よって $h^0(\mathcal{O}_E) = h^1(\mathcal{I}_C(3)) = 1$ が成り立つ．

より一般に線形系 $\Lambda_3 := |C - 3h|$ が (固定点) 自由ならば, $h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 0$ が成り立ち, 逆に自由でなければ Λ_3 は零でない固定因子 (fixed component) F を持つ. F は一般に S 上の (必ずしも被約でない) 直線の非交差和になり, $h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = h^0(F, \mathcal{O}_F)$ が成り立つ. より正確には次の補題が成り立つ.

補題 6.5. Λ_3 の固定部分を F とすると,

$$F = \sum_{\substack{\text{lines } E \text{ on } S \text{ s.t.} \\ (C - 3h \cdot E) < 0}} -(C - 3h \cdot E)\, E = \sum_{\substack{\text{lines } E \text{ on } S \text{ s.t.} \\ (C \cdot E) < 3}} (3 - (C \cdot E))\, E$$

かつ $h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = h^0(F, \mathcal{O}_F)$ が成り立つ.

$\{l, e_1, \ldots, e_6\}$ を C に対する $\operatorname{Pic} S$ の標準基底とし, この基底の下で C の座標を $(a; b_1, \ldots, b_6)$ とする. すなわち S 上で $C \sim al - \sum_{i=1}^{6} b_i e_i$ が成り立つと仮定する. 固定部分 F の台が直線 e_6 に集中している場合の $h^1(\mathcal{I}_C(3))$ の値を表 1 に記す.

Cases	$(a; b_1, \ldots, b_6)$	$F = \operatorname{Bs} \Lambda_3$	$h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3))$
[0]	$b_6 \geq 3$	$F = \emptyset$	0
[I]	$b_6 = 2, b_5 \geq 3$	e_6	1
[II]	$b_6 = 1, b_5 \geq 3$	$2e_6$	3
[III]	$b_6 = 0, b_5 \geq 3$	$3e_6$	6

表 1: 固定部分 F と $h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3))$ の値

表からすぐにわかるように, 例えば

- $F = e_5 + e_6 \Longrightarrow h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 1 + 1 = 2,$
- $F = e_5 + 2e_6 \Longrightarrow h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 1 + 3 = 4$

のように, $h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3))$ の値が求まる. C に対する $\operatorname{Pic} S$ の標準基底のもとで $H^1(\mathcal{I}_C(3)) = 0$ が $b_6 \geq 3$ と同値であるように, $H^1(\mathcal{I}_C(l)) = 0$ $(l = 1, 2)$ はそれぞれ $b_6 \geq l$ $(l = 1, 2)$ と同値である. つまり C が 2 次正規 (quadratically normal) であるためには, F が S 上の 2 重直線 $2E$ (E は直線) や 3 重直線 $3E$ を含まないことが必要十分である. このとき, $m = h^1(\mathcal{I}_C(3))$ 本の S 上の非交差直線 E_i $(1 \leq i \leq m)$ が存在し,

$$F = E_1 + E_2 + \cdots + E_m \tag{6.5}$$

となる. 3 次曲面上の互いに交わらない直線は 6 本以下であることから, 特に $m \leq 6$ を得る.

7 定理 5.3 の証明の概略

この節では定理 5.3 の証明の概略を簡単に述べる. $W \subset H^S_{d,g}$ を定理の仮定を満たす 3-極大集合とし, C を W の一般元, S を C を含む非特異 3 次曲面とする. もし $H^1(\mathcal{I}_C(3)) = 0$ ならば, 何も証

明する事はない．したがって $H^1(\mathcal{I}_C(3)) \neq 0$ を仮定しよう．このとき (6.4) により，ヒルベルトスキーム $H^S_{d,g}$ の $[C]$ における接空間 $H^0(N_{C/\mathbb{P}^3})$ の次元は, W の次元より真に大きい．W が $(H^S_{d,g})_{\mathrm{red}}$ の既約成分であることを示すには, 補題 6.3 (1) により $\dim_{[C]} H^S_{d,g} = \dim W$ を示せば十分である．すると同じ補題の (2) により $H^S_{d,g}$ は $[C]$ において特異になることがわかり, C は W の中で一般であることから, $H^S_{d,g}$ は W 上至るところ被約でないことがわかる．

補題 6.5 により, S 上の線形系 $\Lambda_3 = |C-3h|$ は零でない固定成分 F を持ち, $h^0(\mathcal{O}_F) = h^1(\mathcal{I}_C(3)) =: m \ (\neq 0)$ が成り立つ．C は 2 次正規であるから, F は m 本の被約直線 E_i $(1 \leq i \leq m)$ の非交差和となる (式 (6.5) を参照)．ここで障害性判定定理 (定理 4.1) を F に対して適用し, ヒルベルトスキーム $H^S_{d,g}$ の $[C]$ におけるスキーム次元が接空間の次元 $h^0(N_{C/\mathbb{P}^3})$ からちょうど m だけ落ちる事が証明できる．実際 W の接空間 t_W に含まれない, すべての接ベクトル $\alpha \in H^0(N_{C/\mathbb{P}^3}) \setminus t_W$ に対し, 障害 $\mathrm{ob}(\alpha)$ が $H^1(N_{C/\mathbb{P}^3})$ の元として零で無い事が示せる．よって $\dim_{[C]} H^S_{d,g} = \dim W$． □

8 予想の完全解決に向けて

様々な部分的な証明は得られたが, 予想 5.2 の全体の証明は未解決のままである．定理 5.3 の証明では, W の一般元 C の 2 次正規性 (すなわち $H^1(\mathcal{I}_C(2)) = 0$) を仮定して証明した．Ellia の反例により, W の一般元 C が線形正規でなければ, 予想 5.2 の結論は正しくないことが知られている．したがって予想の完全解決のためには, 線形正規であり, かつ 2 次正規でないような曲線 C に対しても, 予想の結論を示す必要がある．このとき補題 6.5 における固定成分 F は 6 本以下の直線 E_i $(1 \leq i \leq m \leq 6)$ を用いて, 一般的に次の形で与えられる：

$$F = E_1 + \cdots + E_j + 2E_{j+1} + \cdots + 2E_m \qquad (1 \leq j \leq m).$$

したがって F は 2 重直線を含み, 予想 5.2 の証明が複雑になる．2 重直線が含まれる場合には, 障害性判定定理 (定理 4.1) を適用できないのみならず, 障害を受ける事が期待される一部の 1 位無限小変形が 2 位変形までリフトすることが分かっており, この事実が無限小変形とその障害類の計算という方法を用いた予想の証明を困難にしている．

謝辞　この度の研究集会も筆者にとって楽しく有意義なものであった. 集会を運営し, 講演の機会を与えて下さった高知大学の福間慶明さんと新潟大学の小島秀雄さんに, この場を借りて感謝の意を表したい.

参考文献

[1] G. Bolondi, J. O. Kleppe, and R. M. Miró-Roig. Maximal rank curves and singular points of the Hilbert scheme. *Compositio Math.*, 77(3):269–291, 1991.

[2] P. Ellia. D'autres composantes non réduites de Hilb $\mathbf{P}^3$. *Math. Ann.*, 277(3):433–446, 1987.

[3] G. Ellingsrud. Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans $\mathbf{P}^e$ à cône de Cohen-Macaulay. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 8(4):423–431, 1975.

[4] G. Fløystad. Determining obstructions for space curves, with applications to nonreduced components of the Hilbert scheme. *J. Reine Angew. Math.*, 439:11–44, 1993.

[5] L. Gruson and C. Peskine. Genre des courbes de l'espace projectif. II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(3):401–418, 1982.

[6] G. Halphen. Mémoire sur la classification des courbes gauches algébrique. *J. Éc. Polyt.*, 52:1–200, 1882.

[7] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[8] J. O. Kleppe. Nonreduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves. In *Space curves (Rocca di Papa, 1985)*, volume 1266 of *Lecture Notes in Math.*, pages 181–207. Springer, Berlin, 1987.

[9] J. O. Kleppe. The Hilbert scheme of space curves of small diameter. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(5):1297–1335, 2006.

[10] M. Martin-Deschamps and D. Perrin. Le schéma de Hilbert des courbes gauches localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 29(6):757–785, 1996.

[11] S. Mukai and H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold. I. A generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes. *J. Algebraic Geom.*, 18(4):691–709, 2009.

[12] D. Mumford. Further pathologies in algebraic geometry. *Amer. J. Math.*, 84:642–648, 1962.

[13] H. Nasu. Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 42(1):117–141, 2006.

[14] M. Noether. *Zur grundlegung der theorie der algebraischen raumcurven.* Verlag der Koniglichen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1883.

[15] C. H. Walter. Some examples of obstructed curves in $\mathbf{P}^3$. In *Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989)*, volume 179 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 324–340. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.