3次元del Pezzo多様体内の退化曲線の変形*

那須弘和 (Hirokazu Nasu) †

1 序文

本報告は [10] の解説である. 3 次元射影多様体 V 内の曲線 C に対し部分多様体としての C の変形を調べる為には, V の Hilbert scheme $\operatorname{Hilb} V$ を対応する点 $[C]$ の近傍で調べればよい. 本稿では C と V がともに非特異な場合に $C \subset S \subset V$ を満たす中間の曲面 S を用いて調べる. 一般に C の S 内での変形と S の V 内での変形の振る舞いがともに良くても, C の V 内での変形の振る舞いが良いとは限らない. 例えば Hilbert schemes $\operatorname{Hilb} V$ と $\operatorname{Hilb} S$ がそれぞれ点 $[S]$ と点 $[C]$ において非特異かつ期待次元 (それぞれ $\chi(S, N_{S/V})$ と $\chi(C, N_{C/S})$) であっても, $\operatorname{Hilb} V$ は点 $[C]$ を通るある既約成分の生成点において被約でない (generically non-reduced) ことがある (Mumford の例 [8] を参照). 向井茂氏との共同研究 [7] では多くの単線織 (uniruled) な V に対し, このような非被約成分が構成された. 証明の鍵は制限写像

$$\rho : H^0(S, N_{S/V}) \longrightarrow H^0(C, N_{S/V}\big|_C) \tag{1.1}$$

が全射的でないような C と S をうまくとることであった. 一般に ρ が全射的ならば, C の全ての (小) 変形 $C' \subset V$ に対し, S と代数的同値な V の因子 S' が存在し, C' を含む. しかし ρ が全射的でないときは全ての S' を脱出しようとする C の 1 位無限小変形が存在し, 必ずしもそうは言えない. 上の場合においてはそのような 1 位無限小変形が障害を受けることにより, 結果的に C の全ての変形が S の変形の中にとどまっていた.

$C \subset V$ のイデアル層 $\mathcal{I}_C$ を直線束 $\mathcal{O}_V(S)$ で捻った層の Euler 標数 $\chi(V, \mathcal{I}_C(S))$ は, C を含み S と線形同値な曲面の数を表す. 向井氏によって次の問題が提起された.

問題 1.1. C が S に数値的に含まれる, すなわち $\chi(V, \mathcal{I}_C(S)) \geq 1$ ならば, C の V 内における全ての (小) 変形は S と代数的同値な曲面 $S' \subset V$ に含まれるか？

Kleppe はこの問題を V が 3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3$, S が非特異 3 次曲面 S_3 の場合に考察し, 次の予想を与えた.

---

*研究集会『射影多様体の幾何とその周辺 2006』(平成 18 年 11 月 3 日〜5 日, 高知大学) 報告
†京都大学数理解析研究所

予想 1.2 (Kleppe, cf. [6])**.** $C \subset S_3 \subset \mathbb{P}^3$ を非特異3次曲面 S_3 上の非特異連結曲線とする. $\chi(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) \geq 1$ かつ C が線形正規ならば, C の $\mathbb{P}^3$ 内における全ての (小) 変形は3次曲面 S_3'(すなわち $S_3' \sim S_3$) に含まれる.

予想を証明するための試験場として V が非特異3次元 del Pezzo 多様体 (cf. §2.1), S が V の非特異超平面切断, すなわち del Pezzo 曲面である場合に問題 1.1 を考察し, 次の定理を得た.

定理 1.3. V を非特異3次元 del Pezzo 多様体とし, H をその偏極とする. 線形系 $|H|$ の非特異元 S に含まれる非特異曲線 $C \subset V$ が次の2条件を満たすと仮定する:

(1) $\chi(V, \mathcal{I}_C(S)) \geq 1$;

(2) S 上の直線 ℓ で C と交わらないものが全て **good line**, すなわち法束 $N_{\ell/V}$ が自明 $(\simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2})$ である.

このとき C は **stably degenerate** である, すなわち C の全ての (小) 変形 $C' \subset V$ に対し C' を含む曲面 $S' \in |H|$ が存在する.

V の次数 $(:= (H^3)_V)$ を n, C の次数と種数をそれぞれ d と g で表せば, $\chi(V, \mathcal{I}_C(S)) \geq 1$ は $g \geq d - n$ と同値である. $g < d - n$ ならば C は stably degenerate ではない. また S 上に **bad line** ℓ (i.e. $N_{\ell/V} \not\simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$) が存在し $C \cap \ell = \emptyset$ を満たせば, C は必ずしも stably degenerate とは限らない. (次数7の del Pezzo 3-fold $V_7 \subset \mathbb{P}^8$ の場合に例がある.)

射影多様体 V に対し, V 内の非特異曲線の Hilbert scheme を $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ で表す.

系 1.4. $C \subset S \subset V$ が定理 1.3 の仮定 (1) と (2) を満たし, さらに曲線 C の種数 g は2以上であると仮定する. このとき次の3つは同値である:

(a) 点 $[C]$ は $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ の特異点;

(b) $H^1(V, \mathcal{I}_C(S)) \neq 0$;

(c) S 上の (good) line ℓ で C と交わらないものが存在する.

コホモロジー群 $H^1(V, \mathcal{I}_C(S))$ は (1.1) の制限写像 ρ の余核と同型になる. 定理 1.3 の証明 (cf. §4.3) では, ρ が全射的でないときに C の一部の1位無限小変形 (ちょうど ρ の余核に対応するもの) が2位変形へのリフトの際に障害を受けることを証明する. その為に3節で S の V 内における極付き1位無限小変形というものを導入する. この極付き1位無限小変形の障害性を示すことで定理 1.3 が得られる. 本報告では多様体及びスキームは標数0の代数閉体 k 上定義されているものとする.

2 準備

2.1 Del Pezzo 3-folds

3 次元非特異射影多様体 V で反標準因子 $-K_V$ が豊富な因子 H を用いて $-K_V = 2H$ と表されるものを **del Pezzo 3-fold** と呼ぶ. H は V の**偏極**と呼ばれ, H の V における自己交点数 $(H^3)_V$ は V の**次数**と呼ばれる. 定義から明らかなように del Pezzo 3-fold は Fano 多様体の一種である. Iskovskih [4] と藤田氏 [2, 3] により完全に分類されていて, 全ての del Pezzo 3-fold V は表 1 の V_n $(1 \leq n \leq 8)$ もしくは V_6' のいずれかに同型である. 表 1 において n と ρ はそれぞれ V の次数, Picard 数を表す. 線形系 $|H|$ の非特異元 S は del Pezzo 曲面になる. すなわち 8 個以下の点における $\mathbb{P}^2$ の爆発もしくは $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に同型になる.

表 1: Del Pezzo 3-folds

del Pezzo 3-folds	n	ρ	
$V_1 = (6) \subset \mathbb{P}(3,2,1,1,1)$	1	1	6 次重み付き超曲面
$V_2 = (4) \subset \mathbb{P}(2,1,1,1,1)$	2	1	4 次重み付き超曲面
$V_3 = (3) \subset \mathbb{P}^4$	3	1	3 次超曲面
$V_4 = (2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^5$	4	1	2 つの 2 次超曲面の完全交叉
$V_5 = [\mathrm{Gr}(2,5) \overset{\text{Plücker}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^9] \cap \mathbb{P}^6$	5	1	Grassmann 多様体の線形切断
$V_6 = [\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^8] \cap \mathbb{P}^7$	6	2	
$V_6' = [\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^7]$	6	3	
$V_7 = \mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\, \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^8$	7	2	$\mathbb{P}^3$ の 1 点爆発
$V_8 = \mathbb{P}^3 \overset{\text{Veronese}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^9$	8	1	$\mathbb{P}^3$ の 2 次 Veronese 埋め込み

good line と bad line Del Pezzo 3-fold V 内の有理曲線 $\ell \simeq \mathbb{P}^1$ で $(\ell \cdot H)_V = 1$ を満たすものを**直線 (line)** と呼ぶ. 全ての直線 ℓ に対し, 法束 $N_{\ell/V}$ は次のいずれかを満たす:

$$N_{\ell/V} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k) \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

$k = 0$ のとき ℓ は **good line**, $k \neq 0$ のとき **bad line** と呼ばれる.

S を非特異射影曲面とし, L を S 上の直線束とする.

補題 2.1. E を S 上の既約曲線とし $\iota : S^\circ := S \setminus E \hookrightarrow S$ を開埋め込みとする. もし $(E^2)_S < 0$ かつ $\deg L\big|_E \leq 0$ ならば層の包含 $L \hookrightarrow L \otimes \iota_* \mathcal{O}_{S^\circ}$ より誘導される写像

$$H^1(S, L) \longrightarrow H^1(S^\circ, L\big|_{S^\circ})$$

は単射的である.

この補題より $H^1(S,L)$ を $H^1(S^\circ, L\big|_{S^\circ})$ におけるその像と同一視できる.

2.2 1 位無限小変形と障害

V を非特異多様体, $X\subset V$ を非特異な閉部分多様体とする. X の 1 **位無限小変形 (first order infinitesimal deformation)** とは閉部分多様体 $\tilde{X}\subset V\times \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ でもって $\operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ 上平坦かつ中心ファイバーが X であるものをいう. 良く知られているように X の 1 位無限小変形 $\tilde{X}$ 全体と層準同型 $\alpha:\mathcal{I}_X\to\mathcal{O}_X$ のなす群との間には一対一対応がある. 与えられた $\alpha\in\operatorname{Hom}(\mathcal{I}_X,\mathcal{O}_X)$ に対し $\operatorname{ob}(\alpha)\in\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_X,\mathcal{O}_X)$ を次で定める:

$$\operatorname{ob}(\alpha)=\delta(\alpha)\cup\alpha.$$

ただしここで δ は V 上の完全列

$$0\longrightarrow\mathcal{I}_X\longrightarrow\mathcal{O}_V\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

から誘導される余核写像 $\delta:\operatorname{Hom}(\mathcal{I}_X,\mathcal{O}_X)\to\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_X,\mathcal{I}_X)$ であり, $\cup$ はカップ積写像

$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_X,\mathcal{I}_X)\times\operatorname{Hom}(\mathcal{I}_X,\mathcal{O}_X)\xrightarrow{\cup}\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_X,\mathcal{O}_X)$$

である. このとき $\tilde{X}$ が $\operatorname{Spec} k[t]/(t^3)$ 上の変形にリフトする為には $\operatorname{ob}(\alpha)=0$ が必要かつ十分である. $\operatorname{ob}(\alpha)$ は α の**障害 (obstruction)** と呼ばれる. 同型 $\operatorname{Hom}(\mathcal{I}_X,\mathcal{O}_X)\simeq H^0(N_{X/V})$ により, α は法束 $N_{X/V}$ の大域切断とみなすことができる. X も V も非特異であるので, $\operatorname{ob}(\alpha)$ は部分群 $H^1(N_{X/V})\subset\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_X,\mathcal{O}_X)$ に含まれる. X が V の超曲面の場合には $\operatorname{ob}(\alpha)$ は簡単なカップ積で表せる.

例 2.2. X を V の超曲面とする. 写像 $d_X: H^0(X,N_{X/V})\to H^1(X,\mathcal{O}_X)$ を $(2.1)\otimes\mathcal{O}_X(V)$ の余核写像 $\delta: H^0(N_{X/V})\to H^1(\mathcal{O}_V)$ と X への制限写像 $H^1(\mathcal{O}_V)\to H^1(\mathcal{O}_X)$ の合成で定義する. このとき $\operatorname{ob}(\alpha)$ はカップ積 $d_X(\alpha)\cup\alpha$ に等しい. ただし $\cup$ はカップ積写像

$$H^1(X,\mathcal{O}_X)\times H^0(X,N_{X/V})\xrightarrow{\cup}H^1(X,N_{X/V})$$

である.

3 極付き 1 位無限小変形

V を非特異 3 次元射影多様体, E と S をそれぞれ V 内の曲線と曲面で共に非特異と仮定する. 小節 §2.2 で見たように法束 $N_{S/V}$ の大域切断は S の V 内における 1 位無限小変形と同一視できる.

定義 3.1. 法束 $N_{S/V}$ の有理切断 v でもって E に沿って 1 位の極を持つもの (すなわち $v \in H^0(N_{S/V}(E)) \setminus H^0(N_{S/V}))$ を S の V 内における**極付き 1 位無限小変形 (infinitesimal deformation with pole)** と呼ぶ.

S° と V° をそれぞれ $S^\circ := S \setminus E$ と $V^\circ := V \setminus E$ で定義される開多様体とする. 開埋め込み $S^\circ \hookrightarrow S$ を ι で表せば, 層準同型 $[\mathcal{O}_S(E) \hookrightarrow \iota_* \mathcal{O}_{S^\circ}] \otimes N_{S/V}$ の誘導する自然な写像 $H^0(S, N_{S/V}(E)) \to H^0(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$ は単射的になる. よって $H^0(N_{S/V}(E))$ の元をその像と同一視する. すなわち切断 v の像は S° の V° 内における 1 位無限小変形を定める.

定理 3.2. E の S における自己交点数 $(E^2)_S$ が負かつ $\det N_{E/V} \simeq \mathcal{O}_E$ と仮定する. もし E 上の完全列

$$0 \longrightarrow N_{E/S} \longrightarrow N_{E/V} \longrightarrow N_{S/V}\big|_E \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

が分裂しないならば, 極付き 1 位無限小変形 v より定まる S° の V° 内における 1 位無限小変形は $\operatorname{Spec} k[t]/(t^3)$ 上の変形にリフトしない.

証明) v の障害類 $\mathrm{ob}(v) \in H^1(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$ が零でないことを示せば十分である. 補題 2.1 と条件 $(E^2)_S < 0$ より $H^1(N_{S^\circ/V^\circ})$ には自然なフィルター付け

$$H^1(S, N_{S/V}) \subset H^1(S, N_{S/V}(E)) \subset H^1(S, N_{S/V}(2E)) \subset \cdots \subset H^1(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$$

が入る. 同様に $H^1(\mathcal{O}_{S^\circ})$ にも自然なフィルター付け

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \subset H^1(S, \mathcal{O}_S(E)) \subset H^1(S, \mathcal{O}_S(2E)) \subset \cdots \subset H^1(S^\circ, \mathcal{O}_{S^\circ})$$

が入る. 例 2.2 で定義した $d_X(v) \in H^1(\mathcal{O}_X)$ を $X = S^\circ$ の場合に計算すると $d_{S^\circ}(v)$ は E に 2 位の極を持ち, $H^1(\mathcal{O}_S(2E)) \subset H^1(\mathcal{O}_{S^\circ})$ に含まれる事がわかる. v は $H^0(N_{S/V}(E))$ の元であったので, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\mathcal{O}_{S^\circ}) & \times & H^0(N_{S^\circ/V^\circ}) & \stackrel{\cup}{\longrightarrow} & H^1(N_{S^\circ/V^\circ}) \\ \bigcup & & \bigcup & & \bigcup \\ H^1(\mathcal{O}_S(2E)) & \times & H^0(N_{S/V}(E)) & \stackrel{\cup}{\longrightarrow} & H^1(N_{S/V}(3E)) \end{array}$$

より $\mathrm{ob}(v) = d_{S^\circ}(v) \cup v \in H^1(N_{S^\circ/V^\circ})$ は $H^1(N_{S/V}(3E))$ に含まれることがわかる.

$\mathrm{ob}(v) \neq 0$ の為には $\mathrm{ob}(v)$ の E への制限 $\mathrm{ob}(v)\big|_E \in H^1(N_{S/V}(3E)\big|_E)$ が零でないことを示せば十分である. このとき次の補題が本質的である.

補題 3.3 ([7, Proposition 2.4 (2)])**.** 任意の $v \in H^0(N_{S/V}(E))$ に対し $d_{S^\circ}(v)\big|_E \in H^1(\mathcal{O}_E(2E))$ を $d_{S^\circ}(v) \in H^1(\mathcal{O}_S(2E))$ の E への制限とする. このとき $H^1(\mathcal{O}_E(2E))$ の元としての等式 $d_{S^\circ}(v)\big|_E = \partial(v\big|_E)$ が成立する. ただしここで

$$\partial : H^0(N_{S/V}(E)\big|_E) \longrightarrow H^1(N_{E/S}(E)) \simeq H^1(\mathcal{O}_E(2E))$$

は完全列 (3.1)$\otimes \mathcal{O}_S(E)$ の余核写像である.

v の定義より $v\big|_E \in H^0(N_{S/V}(E)\big|_E)$ は零でない．このとき仮定より E 上の直線束 $N_{S/V}(E)\big|_E \simeq \det N_{E/V}$ は自明である．完全列 (3.1) が分裂しないことから $\partial(v\big|_E) \neq 0$ が従う．故に補題 3.3 より $H^1(N_{S/V}(3E)\big|_E)$ において

$$\mathrm{ob}(v)\big|_E = d_{S^\circ}(v)\big|_E \cup v\big|_E = \partial(v\big|_E) \cup v\big|_E \neq 0$$

が得られる． $\square$

例 3.4. $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ を非特異な cubic 3-fold, S_3 を V_3 の超平面切断, そして E を S_3 上の第一種例外曲線 (すなわち $E \simeq \mathbb{P}^1$ かつ $(E^2)_S = -1$) とする．もし E が V_3 の上で good line (すなわち $N_{E/V_3} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$) ならば, 完全列 (3.1) は

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \longrightarrow {\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \longrightarrow 0$$

に等しく分裂しない．従って $v \in H^0(N_{S/V}(E)) \setminus H^0(N_{S/V})$ より定まる S_3° の V_3° 内での 1 位無限小変形は $\operatorname{Spec} k[t]/(t^3)$ 上の変形にリフトしない．

以下では後の主定理 1.3 の証明のために, 定理 3.2 を定量的な形で一般化する．$E_1, \dots, E_m$ を S 上の既約曲線とし, E をその和からなる曲線とする．この場合にも上と同様に (極付き無限小変形の) 障害写像 $\mathrm{ob} : H^0(N_{S/V}(E)) \to H^1(N_{S/V}(3E))$ が定義され, さらに ob は

$$\begin{array}{cccc} \overline{\mathrm{ob}}: & H^0(N_{S/V}(E))\big/H^0(N_{S/V}) & \longrightarrow & H^1(N_{S/V}(3E)\big|_E), \\ & \cup & & \cup \\ & v \pmod{H^0(N_{S/V})} & \longmapsto & \mathrm{ob}(v)\big|_E \end{array}$$

を誘導する．次がその一般化である．

命題 3.5. S が $H^1(N_{S/V}) = 0$ を満たすと仮定する．各 i に対し $(E_i^2)_S < 0$ かつ $\det N_{E_i/V} \simeq \mathcal{O}_{E_i}$, さらに完全列

$$0 \longrightarrow N_{E_i/S} \longrightarrow N_{E_i/V} \longrightarrow N_{S/V}\big|_{E_i} \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

が分裂しないならば, $\overline{\mathrm{ob}}$ は単射的である．

特に V が del Pezzo のときには次の系が得られる．

系 3.6. V を非特異 3 次元 del Pezzo 多様体とし, V の偏極線形系 $|H|$ の非特異元を S とする．$E_1, \dots, E_m$ を S 上の第一種例外曲線とし, 全て V 上で good line とする．このとき $\overline{\mathrm{ob}}$ は単射的である．

4　安定的に退化している曲線

V を体 k 上定義された 3 次元射影多様体とし, S を V 内の曲面, C を S 内の曲線とする.

定義 4.1. C が**安定的に退化している (stably degenerate)** とは C の V における全ての (小) 変形 $C' \subset V$ に対し, S と代数的に同値な曲面 $S' \subset V$ が存在して, $C' \subset S'$ となることをいう.

直感的には曲線 C を V 内で少しだけ変形しても, 曲面 $S \supset C$ も C に伴って一緒に変形するような状況を云う. 問題 1.1 は与えられた曲線 C が stably degenerate かどうかを問う問題である.

4.1　Hilbert-flag scheme

この小節では Kleppe [6] により導入された Hilbert-flag scheme を紹介する. Hilbert-flag scheme は incidence scheme の一種である. 詳しくは [6] の第 2 節を参照されたい. C と S の V における Hilbert 多項式をそれぞれ p と q とする. k 上のスキーム T に対し, $V \times_k T$ の閉部分スキームの列の集合

$$\left\{ C_T \subset S_T \subset V \times_k T \;\middle|\; C_T \text{ と } S_T \text{ は } T \text{ 上平坦でありそれぞれ Hilbert 多項式 } p,q \text{ を持つ} \right\}$$

を対応させる関手は射影スキームによって表現される. それを **Hilbert-flag scheme** と呼び, 記号 $\mathrm{Flag}_{p,q} V$ で表す. $\mathrm{Flag}_{p,q} V$ の p, q に関する (非連結) 和を $\mathrm{Flag}\, V$ で表す. 定義より $\mathrm{Flag}\, V$ の k-値点は V 内の曲線 C' と曲面 S' の対 (C', S') であり, $C' \subset S' \subset V$ を満たす.

$\mathrm{Flag}\, V$ から V 内の曲線の Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ へは自然な射 (射影)

$$pr_1 : \mathrm{Flag}\, V \longrightarrow \mathrm{Hilb}^{sc} V, \qquad (C', S') \longmapsto C' \tag{4.1}$$

が存在する. もし pr_1 が点 $[C] \in \mathrm{Hilb}^{sc} V$ の近傍で全射ならば, C は stably degenerate になり, 問題 1.1 に対する答えが肯定的になる. pr_1 の点 (C, S) における接空間写像 (tangential map) を

$$\kappa_{C,S} : \mathcal{T}_{\mathrm{Flag}\, V,(C,S)} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{Hilb}\, V,C} = H^0(C, N_{C/V}) \tag{4.2}$$

で表す.

補題 4.2 (cf. [6],§2)**.** $H^1(C, N_{C/S}) = H^1(S, N_{S/V}) = 0$ を仮定する. このとき次が成り立つ:

(1) $\mathrm{Flag}\, V$ は点 (C, S) において非特異である.

(2) $\mathrm{coker}\, \kappa_{C,S} \simeq \mathrm{coker}\, \rho$ かつ $\ker \kappa_{C,S} \simeq \ker \rho$.

ただし ρ は (1.1) の制限写像とする.

4.2　外成分

小節 2.2 で見たように法束 $N_{C/V}$ の大域切断 α は C の V 内における 1 位無限小変形 C_α を定め，その障害類 $\mathrm{ob}(\alpha) \in H^1(N_{C/V})$ はカップ積として定まる．法束の間の写像 $N_{C/V} \xrightarrow{\pi_S} N_{S/V}\big|_C$ はコホモロジーの間の写像

$$H^i(\pi_S) : H^i(S, N_{C/V}) \longrightarrow H^i(C, N_{S/V}\big|_C) \qquad (i = 0, 1)$$

を誘導する．

定義 4.3. $H^i(\pi_S)$ $(i = 0, 1)$ による α と $\mathrm{ob}(\alpha)$ の像を各々の**外成分 (exterior component)** と呼び，それぞれ $\pi_S(\alpha)$ と $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ で表す．

注意 4.4. C の V 内における 1 位無限小変形 C_α に対し外成分 $\pi_S(\alpha)$ と $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ は直感的には C の S 内における 1 位無限小変形を法とする C_α の法成分とその障害類に相当する．

4.3　定理 1.3 の証明

V を del Pezzo 3-fold とし，$S \in |H| \subset V$ を非特異 del Pezzo 曲面，C を S 上の非特異曲線とする．随伴公式 (adjunction formula) により二つの同型 $N_{S/V} \simeq -K_S$ と $N_{C/S} \simeq -K_S\big|_C + K_C$ が成立し，故に $H^1(N_{S/V}) = H^1(N_{C/S}) = 0$ を得る．従って補題 4.2(1) により Hilbert-flag scheme $\mathrm{Flag}\, V$ は点 (C, S) において非特異である．(C, S) を通る $\mathrm{Flag}\, V$ の既約成分を $\mathcal{W}_{C,S}$ とする．(4.1) の射 pr_1 の $\mathcal{W}_{C,S}$ への制限を pr_1' で表すことにし，(C, S) におけるその接空間写像を (4.2) と同じく

$$\kappa_{C,S} : \mathcal{T}_{\mathcal{W}_{C,S},(C,S)} \to H^0(C, N_{C/V})$$

で表そう．

以下では $\chi(V, \mathcal{I}_C(S)) \geq 1$ を仮定する．α を $N_{C/V}$ の勝手な大域切断とする．α が $\kappa_{C,S}$ の像に入っていれば $\mathcal{W}_{C,S}$ の非特異性より α に対応する C の 1 位無限小変形 C_α は $\mathcal{W}_{C,S}$ の元 (C', S') にリフトする．したがってもし $\kappa_{C,S}$ が全射ならば，$pr_1' : \mathcal{W}_{C,S} \to \mathrm{Hilb}^{sc} V$ は $[C] \in \mathrm{Hilb}^{sc} V$ の近傍で全射になり，C は stably degenerate である．$\kappa_{C,S}$ が全射でない場合は次の命題が成立する．

命題 4.5. $\kappa_{C,S}$ が全射でないとする．もし C と交わりを持たない S 上の直線 ℓ が全て V 上の good line ならば，全ての $\alpha \in H^0(N_{C/V}) \setminus \mathrm{im}\, \kappa_{C,S}$ に対しその障害類 $\mathrm{ob}(\alpha)$ は消えない．

証明）　α の外成分 $\pi_S(\alpha) \in H^0(N_{S/V}\big|_C)$ (§4.2 参照) を考える．補題 4.2(2) により $\pi_S(\alpha)$ は制限写像 $H^0(N_{S/V}) \to H^0(N_{S/V}\big|_C)$ の像に含まれない．S 上の因子 E を

$$E := \sum_{\substack{\text{lines } \ell \text{ s.t.} \\ \ell \cap C = \emptyset}} \ell$$

により定義する．このとき $\chi(V,\mathcal{I}_C(S)) \geq 1$ を用いるとコホモロジー $H^1(N_{S/V}(E-C))$ の消滅が得られる．故に制限写像

$$H^0(S, N_{S/V}(E)) \to H^0(C, N_{S/V}\big|_C)$$

は全射的になる．従って $H^0(N_{S/V}(E))$ の元 v で $v\big|_C = \pi_S(\alpha)$ となるものが存在する*．この v は第 3 節で考察した $S \subset V$ の極付き 1 位無限小変形に他ならない．さらにカップ積の式変形により障害類 $\mathrm{ob}(\alpha)$ の外成分 $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ は

$$\mathrm{ob}_S(\alpha) = \mathrm{ob}(v)\big|_C$$

と表すことができる．仮定より E の成分は全て good line である．従って系 3.6 により $\mathrm{ob}(v) \in H^1(N_{S/V}(3E))$ は零でない．コホモロジーの制限写像 $H^1(N_{S/V}(3E)) \to H^1(N_{S/V}\big|_C)$ の単射性 (比較的簡単に証明できる) から, $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ は零でない．特に $\mathrm{ob}(\alpha) \neq 0$ を得る． □

すなわち C の全ての 1 位無限小変形は, $\mathcal{W}_{C,S}$ からくる大域的な変形にリフトされるものを除いて全て障害を受ける．故に C は stably degenerate である．以上により定理 1.3 が証明された． □

注意 4.6. 定理 1.3 や命題 4.5 の主張は次の点で興味深い．一見すると $C \subset V$ の部分多様体としての変形が C から離れた場所に存在する別の曲線 $\ell \subset V$ の法束 $N_{\ell/V}$ に依存することを主張している．C の変形は C の V 内での近傍で決定されるはずなので, この主張は直観にそぐわない．しかし C と ℓ は同一曲面 S に含まれる．S が介在することによって ℓ が C の変形に何らかの影響を与えているようだ．

実は命題 4.5 からは定理 1.3 よりもう少し強いことが言える．$W_{C,S}$ を射 $pr_1' : \mathcal{W}_{C,S} \to \mathrm{Hilb}^{sc} V$ の像とする．明らかに $W_{C,S}$ は $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ の既約閉部分集合になる．

定理 4.7. $C \subset S \subset V$ が定理 1.3 の仮定を満たすとする．このとき $W_{C,S}$ は $(\mathrm{Hilb}^{sc} V)_{\mathrm{red}}$ の既約成分である．さらに $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ は $H^1(V,\mathcal{I}_C(S)) = 0$ ならば $W_{C,S}$ に沿って生成的に非特異, $H^1(V,\mathcal{I}_C(S)) \neq 0$ ならば $W_{C,S}$ に沿って生成的に非被約 (generically non-reduced) となる．

すなわち命題 4.5 は $W_{C,S}$ が $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ の既約閉部分集合として極大であることも主張している．$W_{C,S}$ の一般点における $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ の Zariski 接空間の次元は $\dim W_{C,S}$ に非正規指数 $h^1(V,\mathcal{I}_C(S))$ を加えたものに等しいことから後半の主張が得られる．$H^1(V,\mathcal{I}_C(S)) = 0$ ならば, $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ は点 $[C]$ の近傍で $W_{C,S}$ と同型になる．

定理 4.7 は $\mathbb{P}^3$ 内の非特異連結曲線の Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ に関する次の予想 (Kleppe-Ellia 予想) のちょうど del Pezzo 3-fold 版になっている．

*外成分 $\pi_S(\alpha)$ は $N_{S/V}$ の大域切断にはリフトしないが E に 1 位の極を許した $N_{S/V}$ の有理切断へはリフトする．この事実が証明のミソである．

予想 4.8 (Kleppe, Ellia)**.** W を一般元 $[C] \in W$ が非特異3次曲面に含まれるような $\mathrm{Hilb}^{sc}\,\mathbb{P}^3$ の既約閉部分集合とし, そのようなものの中で極大† とする. もし $\chi(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) \geq 1$ かつ C が線形正規ならば W は $\mathrm{Hilb}^{sc}\,\mathbb{P}^3$ の既約成分となる. さらに $\mathrm{Hilb}^{sc}\,\mathbb{P}^3$ は $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 0$ ならば W に沿って生成的に非特異, $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) \neq 0$ ならば W に沿って生成的に非被約となる.

5 応用

定理 1.3 や定理 4.7 の応用として次を示す.

定理 5.1. 非特異3次元 del Pezzo 多様体 V 上の非特異連結曲線の Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}^{sc}\,V$ は生成的に被約でない既約成分を持つ.

次数 8 の場合は $V \simeq \mathbb{P}^3$ であり (cf. 表 1), 既に Mumford [8] の例が知られているので新しい結果としては V の次数が 7 以下の場合になる.

証明） H と n をそれぞれ V の偏極と次数とする. $n \leq 7$ と仮定しても良い. このとき Iskovskih [5] の結果から V 上には good line ℓ が存在する. ℓ を含む非特異 del Pezzo 曲面を $S_n \in |H|$ とする. S_n 上の線形系 $\Lambda := |-2K_{S_n} + 2\ell|$ を考える. S_n から ℓ をつぶした曲面を S_{n+1} とすると, S_{n+1} は次数 $n+1$ の del Pezzo 曲面になる. Λ は S_{n+1} 上の線形系 $|-2K_{S_{n+1}}|$ の S_n への引き戻しであり, 固定点自由である. 従って Bertini の定理より Λ の一般元 C は非特異連結曲線であり, 次数は $d = 2n+2$, 種数は $g = n+2$ になる. 特に $g = d - n$ になる. 一方交点数の計算 $(-2K_{S_n} + 2\ell) \cdot \ell = 2 - 2 = 0$ により, C と ℓ は交わりを持たないことに注意する. さらに ℓ は S 上で唯一のそのような直線である. 定理 4.7 より W_{C,S_n} は $(\mathrm{Hilb}^{sc}\,V)$ の既約成分である. さらに系 1.4 により $H^1(V, \mathcal{I}_C(S_n)) \neq 0$ を得る. 従って定理 4.7 の後半の主張から $\mathrm{Hilb}^{sc}\,V$ は W_{C,S_n} に沿って生成的に被約でない. $\square$

注意 5.2.
(1) 曲線 C の構成からわかるように $C \subset S_n$ は del Pezzo 曲面 S_{n+1} 上の標準曲線 C' (i.e. $K_{C'} \simeq \mathcal{O}_{C'}(1) = -K_{S_{n+1}}\big|_{C'}$) を C' の外の点 $p \in S_{n+1} \setminus C'$ からの射影したときの像である.

(2) 既約成分 W_{C,S_n} の次元は $d + g + n = 4n + 4$ に等しい.

(3) W_{C,S_n} の一般点における $\mathrm{Hilb}^{sc}\,V$ の接空間の次元は $h^0(N_{C/V}) = 4n + 5$ に等しい. 実際, C 上の完全列

$$0 \longrightarrow N_{C/S_n} \longrightarrow N_{C/V} \longrightarrow N_{S_n/V}\big|_C \longrightarrow 0$$

†すなわち, もし $W \subsetneqq V$ をみたす既約閉部分集合 $V \subset \mathrm{Hilb}^{sc}\,\mathbb{P}^3$ が存在すれば V の一般元はどんな 3 次曲面にも含まれない.

が存在し, $N_{C/S_n} \simeq \mathcal{O}_C(2K_C)$ かつ $N_{S_n/V}\big|_C \simeq \mathcal{O}_C(K_C)$ である. 故に

$$h^0(N_{C/V}) = h^0(2K_C) + h^0(K_C) = (3n+3) + (n+2) = 4n+5$$

が得られる.

謝辞　研究集会はアットホームな雰囲気で行われ, 筆者にとって楽しく有意義なものであった. 集会を運営し, 講演の機会を与えて下さった高知大学の福間慶明さんと新潟大学の小島秀雄さんに対しここに感謝の意を表す.

参考文献

[1] P. Ellia: D'autres composantes non réduites de Hilb $\mathbb{P}^3$, *Math. Ann.* **277**(1987), 433–446.

[2] T. Fujita: On the structure of polarized manifolds with total deficiency one. I, *J. Math. Soc. Japan* **32**(1980), 709–725.

[3] T. Fujita: On the structure of polarized manifolds with total deficiency one. II, *J. Math. Soc. Japan* **33**(1981), 415–434.

[4] V.A. Iskovskih: Fano 3-folds. I, *Math. USSR-Izvstija* **11**(1977), no. 3, 485–527 (English translation).

[5] V.A. Iskovskih: Anticanonical models of three-dimensional algebraic varieties, Current problems in mathematics, *J. Soviet Math.* **13**(1980), 745–814 (English translation).

[6] J. O. Kleppe: Non-reduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves in "*Space curves*" (eds. F. Ghione, C. Peskine and E. Sernesi), Lecture Notes in Math. **1266**, Springer-Verlag, 1987, pp.181–207.

[7] S. Mukai and H. Nasu: Obstruction to deforming curves on a 3-fold, I: A generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes, preprint math.AG/0609284 (2006).

[8] D. Mumford: Further pathologies in algebraic geometry, *Amer. J. Math.* **84**(1962), 642–648.

[9] H. Nasu: Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **42**(2006), 117–141 (see also math.AG/0505413).

[10] H. Nasu: Obstruction to deforming curves on a 3-fold, II: Deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold, preprint math.AG/0609286 (2006).

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町
京都大学 数理解析研究所
e-mail: `nasu@kurims.kyoto-u.ac.jp`