# A new example of a generically non-reduced component of the Hom scheme *

那須弘和 (Hirokazu Nasu) †

Abstract: 一般の種数 5 曲線 $X$ から一般の cubic 3-fold $V \subset \mathbb{P}^4$ への次数 8 の射をパラメーターづける Hom scheme $\mathrm{Hom}_8(X,V)$ は生成的に被約でない期待次元 (=4) の既約成分をもつ.

## §0 Introduction

Mumford[7] は $\mathbb{P}^3$ 内の非特異連結曲線の Hilbert scheme が生成的に被約でない既約成分を持つことを示した. 本稿では Mumford の例を modify, そして技術的には simplify して, ３次元 Fano 多様体の Hom scheme の一例として cubic 3-fold の Hom scheme の既約成分を (ひとつ) 具体的に記述し, それが生成的に被約でないことを示す. なお本報告の内容は向井茂氏との間の共同研究の結果として得られた. 本稿では結果のおおまかな解説にとどめるので証明等の詳細については [5] を参照されたい.

射影多様体 $X$ と $V$ を固定したとき, それらの間の射 $f : X \to V$ の全体には, $\mathrm{Hilb}(X \times V)$ の subscheme として自然な scheme の構造が入る. これを **Hom scheme** と呼び $\mathrm{Hom}(X,V)$ で表す. $V$ の射影埋め込み $V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$(より一般に偏極) を固定したとき, 次数 $d$ の射全体は open かつ closed な subscheme をなす. これを $\mathrm{Hom}_d(X,V)$ で表す. 以下 $X, V$ は非特異とし $X$ を曲線とする. 良く知られているように, 点 $[f]$ における $\mathrm{Hom}(X,V)$ の Zariski 接空間は $H^0(X, f^*\mathcal{T}_V)$ と同型であり,

$$\deg f^*(-K_V) + n(1-g) \leq \dim_{[f]} \mathrm{Hom}(X,V) \leq \dim H^0(X, f^*\mathcal{T}_V), \tag{1}$$

が成立する (ここで $n = \dim V$, $g$ は $X$ の種数, $\mathcal{T}_V$ は $V$ の接束を表す). ここでの下限 $(= \chi(f^*T_V))$ は Hom scheme の**期待次元**と呼ばれる.

曲線からの Hom scheme は森理論や Gromov-Witten 不変量の研究などにおいて中心的な役割を果たすがその具体例 (特に非有理曲線からの Hom scheme) についてはあまり知ら

---

*研究集会『射影多様体の幾何とその周辺 2005』(平成 17 年 11 月 3 日〜5 日, 高知大学) 報告

†京都大学数理解析研究所

れていない. ここではモジュライ的に一般な多様体 $V$ と非有理曲線 $X$ に対し $\mathrm{Hom}(X,V)$ に生成的に被約でない既約成分が現れることを示す.

**定理 1.** $X$ を種数 5 の一般の曲線, $V_3$ を一般の cubic 3-fold または Fermat 型 cubic 3-fold

$$V_3^{\mathrm{Fermat}} : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 \quad \subset \mathbb{P}^4$$

とする. このとき $\mathrm{Hom}_8(X,V_3)$ は生成的に被約でない 4 次元既約成分 $T$ をもつ.

**注意 2.** (1) $T$ の次元 4 は $\mathcal{O}_V(-K_{V_3}) \simeq \mathcal{O}_{V_3}(2)$ より期待次元 $2d+3(1-g)$ に等しい. 一方, $T$ の一般点 $[f]$ における $\mathrm{Hom}_8(X,V_3)$ の接空間の次元は $h^0(f^*\mathcal{T}_{V_3}) = 5$ である.

(2) Hom scheme の生成的に被約でない既約成分の例は, これまで特別な 3 次元 Fano 多様体 $V$ の Hom scheme $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, V)$(次元は 4) に対してしか知られていなかった ($\to$ §3.3).

(3) Mumford[7] は $\mathbb{P}^3$ 内の非特異連結曲線の Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}^S \mathbb{P}^3$ が生成的に被約でない 56 次元既約成分を持つことを示し pathology と呼んだ ($\to$ §3.2). 近年の研究によって非被約成分は Hilbert scheme に頻繁に現れることが明らかになり, 現在では pathology と呼べるかどうかわからない. しかし非被約成分がいつ現れるのかはあまり明らかでなくその原因の理解に向けての取組みが今回の研究の動機となった.

$X$ の $V_3$ への次数 8 の埋め込みは 2 種類ある. 線形正規な埋め込みに対応する点では $\mathrm{Hom}(X,V_3)$ は非特異 4 次元である. 既約成分 $T$ の一般元 $f$ は線形正規でない埋め込みである. このとき線形包 $\langle f(X)\rangle$ は $\mathbb{P}^3$ で, 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{P}^4 & \supset & X & & V_3 & \subset & \mathbb{P}^4 \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \text{一般点からの射影}} & & \Big\downarrow{\simeq} & & \cup & & \Big\uparrow \\
\mathbb{P}^3 & \supset & f(X) & \hookrightarrow & H \cap V_3 & \subset & H \simeq \mathbb{P}^3
\end{array}$$

定理 1 の証明は次のように進む. まず非特異な cubic 3-fold $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ の Hilbert scheme の非被約既約成分 $\tilde{W}$ を構成する (§1). 次に $\tilde{W}$ から種数 5 の曲線のモジュライ空間 $\mathfrak{M}_5$ への射 $\varphi : \tilde{W} \to \mathfrak{M}_5$(分類射) の支配性を示す (§2). その一般ファイバーは Hom scheme $\mathrm{Hom}(X,V_3)$ の既約成分 $T$ と双有理同値であるので, $\mathfrak{M}_5$ の非特異性から定理 1 が従う. §3 では Hilbert scheme や Hom scheme の他の非被約既約成分について解説する. 以下標数 0 の代数的閉体 $k$ 上で考える.

**Notation 3.** 本稿では代数多様体 $V$ 内の非特異連結曲線の Hilbert scheme を $\mathrm{Hilb}^S V$ で表す. また次数 $d$ 種数 $g$ の曲線全体のなす subscheme を $\mathrm{Hilb}^S_{d,g} V$ で表す.

# §1 Hilbert schemeの非被約成分

この節では非特異な cubic 3-fold $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ に対し, Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}^S_{8,5} V_3$ が生成的に被約でない 16 次元既約成分をもつことを示す.

$S_3 = V_3 \cap H$ を $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ の非特異超平面切断, $E$ を $S_3$ 上の直線とする. 組 $(S_3, E)$ は Fano 曲面 $G \subset G(1, \mathbb{P}^4)$ 上の $\mathbb{P}^2$-束の開集合 $P$ でパラメータづけられる. $S_3$ 上の完備線型系 $\Lambda := |-2K_{S_3} + 2E|$ を考える. このとき $\Lambda$ は $S_3$ から $E$ を blow-down した曲面 $F$ 上の線型系 $|-2K_F| \simeq \mathbb{P}^{12}$ の引き戻しになる. $\Lambda$ は固定点自由であり $\Lambda$ の一般元 $C$ は種数 5 の非特異連結曲線となる. そのような曲線 $C$ は $P$ 上の $\mathbb{P}^{12}$-束の開集合 $W$ でパラメータづけられる. よって次の図式を得る

$$
\begin{array}{rcccl}
\{(S_3, C) | C \in |-2K_{S_3} + 2E|\} & = & W^{16} & \hookrightarrow & \mathrm{Hilb}^S V_3 \\
 & & \big\downarrow {\scriptstyle \mathbb{P}^{12}\text{-bundle}} & & \\
\{(S_3, E) | E \subset S_3\} & = & P^4 & & \\
 & & \big\downarrow {\scriptstyle \mathbb{P}^{2}\text{-bundle}} & & \\
\{E \subset V_3\} & = & G^2. & &
\end{array}
$$

族 $W$ の小平-Spencer 写像

$$\kappa_{[C]} : t_{W,[C]} \longrightarrow H^0(C, N_{C/V_3}) \tag{2}$$

は各点 $[C] \in W$ において単射であり, 分類写像 $W \to \mathrm{Hilb}^S V_3$ は埋め込みになる. 以下では $W$ を $\mathrm{Hilb}^S V_3$ の subscheme とみなす. 法束の完全列

$$0 \longrightarrow \underbrace{N_{C/S_3}}_{\cong \mathcal{O}_C(2K_C)} \longrightarrow N_{C/V_3} \longrightarrow \underbrace{N_{S_3/V_3}\big|_C}_{\cong \mathcal{O}_C(K_C)} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

を考えよう. ここで $\mathrm{Hilb}^S V_3$ の接空間 $H^0(C, N_{C/V_3})$ の次元が $h^0(N_{C/V_3}) = h^0(2K_C) + h^0(K_C) = 12 + 5 = 17$ であることに注意する. より正確に述べると $\kappa_{[C]}$ の余核は制限写像 $H^0(S_3, N_{S_3/V_3}) \to H^0(C, N_{S_3/V_3}\big|_C)$ と同型になる. 従って a priori には次の 2 つの可能性がある:

(A) $W$ の Zariski 閉包 $\overline{W}$ は $(\mathrm{Hilb}^S V_3)_{\mathrm{red}}$ の既約成分であり, $\mathrm{Hilb}^S V_3$ は $W$ に沿って特異;
(B) $\overline{W}$ を真に含む $\mathrm{Hilb}^S V_3$ の既約成分 $Z$ が存在し, $\mathrm{Hilb}^S V_3$ は $W$ に沿って非特異.

我々は $(B)$ ではなく $(A)$ になることを示す.

**定理 4.** $W$ の Zariski 閉包 $\overline{W}$ は $(\mathrm{Hilb}^S V_3)_{\mathrm{red}}$ の 16 次元既約成分であり, $\mathrm{Hilb}^S V_3$ は $W$ に沿って被約でない.

証明には [7] と同様の背理法による手法も有効であるが, ここでは [8],[2] 流に Hilbert scheme の無限小解析 (変形の障害性) を用いて示す.

**Hilbert scheme の無限小解析**　$C$ を代数多様体 $V$ 内の曲線とする．$C \hookrightarrow V$ の 1 **位無限小変形**とは closed subscheme $\tilde{C} \subset V \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ で $\operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ 上 flat かつ $\tilde{C} \times k = C$ を満たすものをいう．$C$ の 1 位無限小変形全体は $H^0(N_{C/V})$ でパラメータづけられ Hilbert scheme $\operatorname{Hilb}^S V$ の点 $[C]$ における接空間と同型になる． $\operatorname{Hilb}^S V$ が点 $[C]$ で非特異ならば, 任意の $\alpha \in H^0(N_{C/V})$ と任意の整数 $n \geq 3$ に対し, 対応する 1 位無限小変形 $C_\alpha$ は $\operatorname{Spec} k[t]/(t^n)$ 上の変形にリフトする．

**命題 5.** $C$ を非特異な cubic 3-fold $V_3$ 内の非特異曲線とする．さらに $C$ は $V_3$ の非特異超平面切断 $S_3$ に含まれ, ある直線 $E \subset S_3$ に対し $C \sim -2K_{S_3} + 2E$ と仮定する．もし $N_{E/V_3}$ が自明であれば, $\alpha \in H^0(C, N_{C/V_3}) \setminus \operatorname{im} \kappa_{[C]}$ (cf. (2)) に対し $C$ の 1 位無限小変形 $C_\alpha$ は $\operatorname{Spec} k[t]/(t^3)$ 上の変形にリフトしない．

**Fact 6** (Iskovskih[4])**.** 非特異な cubic 3-fold $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ 上の直線 $E$ は法束 $N_{E/V_3}$ により 2 種類に分かれ各々 good line, bad line と呼ばれる:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & N_{E/V_3} \simeq {\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}^{\oplus 2} & \text{(good line)}; \\ \text{(b)} & N_{E/V_3} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) & \text{(bad line)}. \end{array}$$

一般の直線 $E$ は good であり, bad line 全体は Fano 曲面内の曲線でパラメータづけられる．

命題 5 と Fact 6 から定理 4 は次のように従う．

**定理 4 の証明**　既約集合 $W$ の一般元を $C$ とすれば, 次元の不等式

$$\dim W \leq \dim_{[C]} \operatorname{Hilb}^S V_3 \leq h^0(C, N_{C/V_3}) \tag{4}$$

が成立する．ここで Fact 6 を用いると $C$ の一般性から $E := 1/2(C + 2K_S)$ は good である．従って命題 5 より $C$ は $\operatorname{Spec} k[t]/(t^3)$ 上に伸びない 1 位無限小変形を持ち, $\dim_{[C]} \operatorname{Hilb}^S V_3 < h^0(C, N_{C/V_3})$ が成り立つ．ここで (4) において両端の次元の差が 1 であることに着目すれば $\dim W = \dim_{[C]} \operatorname{Hilb}^S V_3$ を得る．従って $W$ は $(\operatorname{Hilb}^S V_3)_{\mathrm{red}}$ の既約成分をなす．$\operatorname{Hilb}^S V_3$ は $W$ の一般の点で特異であるので, $W$ に沿って被約でない．$\square$

命題 5 は次のカップ積による判定法を用いて示される．より正確には $\alpha \in H^0(N_{C/V_3}) \setminus \operatorname{im} \kappa_{[C]}$ に対し障害類 (カップ積) $\operatorname{ob}(\alpha)$ の非零を示す．

**補題 7.** $C$ を非特異多様体 $V$ 内の非特異連結曲線とし $\alpha \in H^0(N_{C/V}) \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{I}_{C/V}, \mathcal{O}_C)$ を法束 $N_{C/V}$ の大域切断とする．$\alpha$ に対応する $C$ の 1 位無限小変形 $\tilde{C} \subset V \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ が $\operatorname{Spec} k[t]/(t^3)$ 上の変形にリフトする為には次のカップ積が消えることが必要十分である:

$$\operatorname{ob}(\alpha) := \alpha \cup \mathbf{e} \cup \alpha \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_{C/V}, \mathcal{O}_C).$$

ただし $\mathbf{e} \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}_{C/V})$ は自然な完全列 $0 \to \mathcal{I}_{C/V} \to \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_C \to 0$ の拡大類とする．

実際の $\mathrm{ob}(\alpha)$ の計算, 及びその非零の証明はここでは省略する.

さて上述の $\mathrm{Hilb}^S V_3$ の非被約既約成分の構成において, 鍵となったのは $V_3$ 内の非特異曲線の族 $W$ で構成元の各々が非特異超平面切断 $S_3$ (つまり非特異 3 次曲面) に含まれるものであった. $W$ の一般元 $[C]$ における小平-Spencer 写像 $\kappa_{[C]}$ の余核が 1 次元あり, 曲線 $C$ の 1 位無限小変形で障害を受けるものに対応した. 実はこの余核はコホモロジー群 $H^1(V_3, \mathcal{I}_{C/V_3}(1))$ に同型であることがわかる. このような族 $W \subset \mathrm{Hilb}^S V_3$ をより組織的に調べることにより次の定理を得る.

**定理 8.** 整数 $d > 5$ と $g \geq d-3$ に対し $W$ は $\mathrm{Hilb}^S_{d,g} V_3$ の既約閉部分集合であり, その一般元 $C$ が非特異超平面切断に含まれるとする. さらに $W$ はそのような集合の中で極大と仮定する. このとき次が成り立つ:

(1) もし $H^1(V_3, \mathcal{I}_{C/V_3}(1))$ の次元 $\rho$ が 0 または 1 であれば $W$ は $(\mathrm{Hilb}^S V_3)_{\mathrm{red}}$ の $d+g+3$ 次元既約成分である;

(2) さらに $\rho = 0$ ならば $\mathrm{Hilb}^S V_3$ は $W$ に沿って生成的に被約であり, $\rho = 1$ ならば $\mathrm{Hilb}^S V_3$ は $W$ に沿って生成的に被約でない.

定理 8 を適用した具体例を少し挙げよう. 良く知られているように非特異 3 次曲面 $S_3 \subset \mathbb{P}^3$ は $\mathbb{P}^2$ の適当な 6 点 blow-up と同型である. $S_3$ 上の曲線に対しその因子類 $\in \mathrm{Pic}\, S_3 \simeq \mathbb{Z}^7$ を対応させることにより整数の 7 つ組 $(a; b_1, \ldots, b_6)$ が定まる. このような 7 つ組は Weyl 群 $W(\mathbb{E}_6)$ の対称性を除いて唯一に決まる.

**定義 9.** $V_3$ を非特異な cubic 3-fold とする. 与えられた整数の 7 つ組 $(a; b_1, \ldots, b_6)$ に対し一般元が $V_3$ の非特異超平面切断 $S_3$ に含まれるような既約閉部分集合 $W_{(a;b_1,\ldots,b_6)} \subset \mathrm{Hilb}^S V_3$ を次で定義する

$$W_{(a;b_1,\ldots,b_6)} := \left\{ C \in \mathrm{Hilb}^S V_3 \mid C \subset {}^{\exists} S_3 : \text{smooth cubic}, \quad C \in |\mathcal{O}_S(a : b_1, \ldots, b_6)| \right\}^{-}.$$

ただし $^-$ は $\mathrm{Hilb}^S V_3$ 内での閉包を表す.

**例 10.** $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し既約閉部分集合 $W$ を

$$\begin{aligned} W =& W_{(\lambda+6;\lambda+1,1,1,1,1,0)} \subset \mathrm{Hilb}^S_{d,2d-16} V_3 \quad (d = 2\lambda+13) \quad \text{又は} \\ W =& W_{(\lambda+6;\lambda+2,1,1,1,1,0)} \subset \mathrm{Hilb}^S_{d,\frac{3}{2}d-9} V_3 \quad (d = 2\lambda+12) \end{aligned}$$

とする. このとき $W$ の一般元 $C$ は $h^1(C, \mathcal{I}_{C/V_3}(1)) = 1$ を満たす. 従って定理 8 により $W$ は $(\mathrm{Hilb}^S V_3)_{\mathrm{red}}$ の既約成分であり $\mathrm{Hilb}^S V_3$ は $W$ に沿って生成的に被約でない. つまり $\mathrm{Hilb}^S V_3$ は可算無限個の非被約既約成分を持つことが示された.

## §2　分類射の支配性

ここでは§1で示したHilbert schemeの非被約性よりHom schemeの非被約性を導く．定理4で得られたHilbert scheme $\mathrm{Hilb}^S_{8,5}V_3$ の非被約既約成分を $\tilde{W}$ とする (つまり $(\tilde{W})_{\mathrm{red}} = \overline{W}$)．曲線の埋め込みを忘れることで $\tilde{W}$ から種数5曲線のモジュライ空間 $\mathfrak{M}_5$ への射

$$\varphi : \tilde{W} \to \mathfrak{M}_5 \qquad (\textbf{分類射})$$

が定義される．点 $[X] \in \mathfrak{M}_5$ におけるファイバー $\varphi^{-1}([X])$ は $\mathrm{Hom}(X, V_3)$ のopen subschemeと同型である．その $\mathrm{Hom}(X, V_3)$ 内でのZariski閉包を $T$ とする．我々は一般の $[X] \in \mathfrak{M}_5$ に対する $T$ が定理1の要求を満たすことを証明する．そのために $\varphi$ の支配性を示すことが本質的になる．支配性の証明には次のSylvesterの5面体定理 (cf. [3]) を用いる．

**補題 11** (Sylvester's pentahedoron theorem)**.** 一般の4変数斉次3次多項式 $F = F(y_0, y_1, y_2, y_3)$ は適当な5個の斉次1次式 $l_i$ $(0 \le i \le 4)$ 達の立方和 $\sum_{i=0}^4 l_i(y_0, y_1, y_2, y_3)^3$ として表せる．

**定理1の証明**　$X \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ を一般の種数5曲線の標準埋め込み ($|K_X|$ による埋め込み) とする． 良く知られているように像 $X$(同じ記号で表す) は3つの2次超曲面の完全交叉 $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ になる．$X$ の一般性から $q_i$ 達も一般である．$q_i$ 達の張るnet of quadricsの一般のsubpencilから定まる4次del Pezzo曲面を $F$ とする．一般の点 $p \in F \setminus X$ におけるblow-upを $\pi_p : S_p \to F$ とすれば可換図式

$$\begin{array}{ccccc} X & \subset & F & \subset & \mathbb{P}^4 \\ \| & & \uparrow{\scriptstyle \pi_p} & & \downarrow{\scriptstyle 射影\Pi_p} \\ C & \subset & S_p & \subset & \mathbb{P}^3 \end{array} \tag{5}$$

が成り立つ．ただし $C$ は $X$ の $\pi_p$ による逆像である．$X$ は $F$ 上の線形系 $|-2K_F|$ に属すので $C$ は $\pi_p$ の例外曲線を $E$ として $|\pi_p^*(-2K_F)| = |-2K_S + 2E|$ に属す．$F, p$ の取り方から $S_p$ は一般の3次曲面である．

まずFermat型cubic 3-fold $V_3 = V_3^{\mathrm{Fermat}}$ の場合に定理を証明する．補題11より一般の3次曲面は $V_3^{\mathrm{Fermat}}$ の超平面切断と同型である．従って $S_p$ もそうである．よって図式(5)より分類射 $\varphi : \tilde{W} \to \mathfrak{M}_5$ は支配的であり, 一般ファイバー $T^{\mathrm{Fermat}}$ は4次元である．$\mathfrak{M}_5$ は生成的に非特異であるので $T^{\mathrm{Fermat}}$ は生成的に被約でない．

$V_3$ が一般の場合の定理1はFermat型の場合の主張とファイバー次元に関する上半連続性より従う．　□

**問題 12.** $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ をcubic 3-foldとし, $\mathfrak{M}_{\mathrm{cubic}}$ を3次曲面のモジュライ空間とする．このとき非特異な $V_3$ に対し有理写像

$$\varphi_{V_3} : (\mathbb{P}^4)^* \dashrightarrow \mathfrak{M}_{\mathrm{cubic}}, \qquad [H] \mapsto [H \cap V_3]$$

はいつも支配的か?

**注意 13.** 問題 12 に対する答えが肯定的なら定理 1 は非特異な cubic 3-fold $V_3$ に対して正しい.

# §3　他の例

Hilbert scheme や Hom scheme の非被約既約成分に関する他の例について解説する.

## §3.1　Jacobian variety 内の曲線

Hilbert scheme の最も簡単な非被約既約成分は曲線の Abel-Jacobi 写像による埋め込み $\alpha : C \hookrightarrow \operatorname{Jac} C$ から得られる. $\alpha$ の変形は $\operatorname{Jac} C \xrightarrow{\sim} \operatorname{Jac} C$ の変形を導く. 従って $\operatorname{Jac} C$ の subscheme としての $\alpha(C)$ の変形は $\operatorname{Jac} C$ の群構造が導く $\alpha(C) \subset \operatorname{Jac} C$ の平行移動しかない. 特に $(\operatorname{Hilb}(\operatorname{Jac} C))_{\mathrm{red}}$ は $[\alpha(C)]$ を通る $\operatorname{Jac} C$ と同型な $g$ 次元既約成分 $T$ を含む. ただし $g$ は曲線 $C$ の種数とする.

**命題 14.** もし $C$ が種数 3 以上の超楕円曲線ならば $\operatorname{Hilb}(\operatorname{Jac} C)$ は $T$ に沿って被約でない.

証明　$[\alpha(C)]$ における非被約性を示せば十分である.

$$0 \to \mathcal{T}_C \to \underbrace{\mathcal{T}_{\operatorname{Jac}(C)}\big|_C}_{\simeq H^1(\mathcal{O}_C)\otimes\mathcal{O}_C} \to N_{C/\operatorname{Jac} C} \to 0$$

を自然な完全列とする. このとき誘導写像 $H^1(\mathcal{T}_C) \to H^1(\mathcal{O}_C) \otimes H^1(\mathcal{O}_C)$ は単射でない. 実際, その双対 $H^0(K_C) \otimes H^0(K_C) \to H^0({K_C}^{\otimes 2})$ を考えれば仮定 ($C$: hyperelliptic) より全射でないことがわかる. 故に完全列から $h^0(N_{C/\operatorname{Jac} C}) > g = \dim T$ が従う.　□

この非被約性は周期写像 $\mathfrak{M}_g \to \mathcal{A}_g$ が hyperelliptic locus に沿って分岐していることに起因する. Hom scheme $\operatorname{Hom}(C, \operatorname{Jac} C)$ は $[\alpha]$ において非特異である.

## §3.2　Mumford pathology

Mumford [7] は $\mathbb{P}^3$ 内の次数 14 種数 24 の非特異連結曲線の Hilbert scheme $\operatorname{Hilb}^S_{14,24} \mathbb{P}^3$ が期待次元である 56 次元非被約既約成分を持つことを示した. 成分の一般元 $C$ は非特異 3 次曲面に含まれており linearly normal であるが 3-normal でない (i.e. $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) \neq 0$). モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{24}$ の次元は $\dim T$ より大きく $C$ は $\mathfrak{M}_{24}$ 内で一般ではない.

### §3.3　Fano 3-fold 内の曲線

ある種の特別な Fano 3-fold $V$ 内の直線の Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}_{1,0}\,V$ は生成的に被約でないことが知られている．従って $-K_V$ に関する次数 1 の射の Hom scheme $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, V)$ も生成的に被約でない．しかしこの場合 $V$ の一般の変形 $V'$ に対し $\mathrm{Hilb}_{1,0}\,V'$ も $\mathrm{Hom}_1(\mathbb{P}^1, V)$ も生成的に被約になる．二つの例を挙げよう．

(1) Smooth quartic 3-fold $V_4 \subset \mathbb{P}^4$ の超平面切断が平面 4 次曲線上の錐になっているとき, $V_4$ 内の直線の Hilbert scheme はその 4 次曲線を既約成分として含む．さらにこの既約成分に沿って被約でない ([4, §3]).

(2) [6] において梅村氏と向井氏は $PSL(2)$ の icosahedral group $I_{60}$ による商多様体の自然なコンパクト化 $U_{22} := \overline{PSL(2)/I_{60}} \subset \mathbb{P}^{12}$ を考えた．さらに $U_{22}$ 内の直線の Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}_{1,0}\,U_{22}$ が double $\mathbb{P}^1$ であることが示された．しかし $U_{22}$ は 6 次元の変形空間を持ち $U_{22}$ の一般の変形 $U'_{22} \not\cong U_{22}$ に対し Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}_{1,0}\,U'_{22}$ は被約になる (cf. Prokhorov[9]).

### §3.4　quintic 3-fold 内の曲線

種数 5 の標準曲線の generic projection $C = [C_8 \subset \mathbb{P}^3]$ は Voisin の例 (Clemens-Kley[1]) にも出現する．この曲線 $C$ を含む smooth quintic 3-fold $V_5 \subset \mathbb{P}^4$ の Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}_{8,5}\,V_5$ は $[C]$ において embedded component をもつことが知られている．

## 参考文献


[1] H. Clemens and H.P. Kley: On an example of Voisin, Michigan Math. J. **48**(2000), 93–119.

[2] D. Curtin: Obstructions to deforming a space curve, Trans. Amer. Math. Soc. **267**(1981), 83–94.

[3] E. Dardanelli and B. van Geemen: Hessians and the moduli space of cubic surfaces, math.AG/0409322.

[4] V.A. Iskovskih: Fano 3-folds, Part I, Math. USSR-Izvstija **11**(1977), 485–527, Part II, Math. USSR-Izvstija **12**(1978), 469–506.

[5] S. Mukai and H. Nasu: A new example of a generically non-reduced component of the Hom scheme, in preparation.

[6] S. Mukai and H. Umemura: Minimal rational threefolds, *Algebraic Geometry* (Tokyo/Kyoto, 1982), Lecture Notes in Math. **1016**, Springer-Verlag, 1983, pp. 490–518.

[7] D. Mumford: Further pathologies in algebraic geometry, Amer. J. Math. **84** (1962), 642–648.

[8] H. Nasu: Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme, math.AG/0505413, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42**(2006), 117–141.

[9] Yu. G. Prokhorov: On exotic Fano varieties, Moscow Univ. Math. Bull. **45**(1990), 36–38.