Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme *

那須弘和 (Hirokazu Nasu) †

1　はじめに

空間曲線の Hilbert scheme の非被約性に関して講演した. 詳しくは [7] を参照されたい. $\mathbb{P}^3$ 内の非特異連結曲線の Hilbert scheme を $H^S_{\mathbb{P}^3}$ で表す. $H^S_{\mathbb{P}^3}$ は空間曲線の基本的な不変量である次数 d と種数 g を (すなわち Hilbert 多項式を) 固定した時の曲線からなる subscheme $H^S_{d,g}$ の disjoint union である. Mumford [5] は $H^S_{\mathbb{P}^3}$ が被約でないことを証明し, これを pathology と呼んだ. 彼は被約でない $H^S_{14,24}$ の既約成分を以下のように構成した: まず一般元 C が非特異 3 次曲面に含まれるような $H^S_{14,24}$ の 56 次元既約閉部分集合 W を考え, $H^S_{14,24}$ の点 $[C]$ における (Zariski) 接空間の次元が 57 次元であることを示した. さらに W が $(H^S_{14,24})_{\mathrm{red}}$ の部分多様体として極大であることを示し $H^S_{14,24}$ が (従って $H^S_{\mathbb{P}^3}$ が) 被約でないことを証明した.

本稿では Mumford's pathology の一般化を考える. Hilbert scheme $H^S_{d,g}$ の既約閉部分集合であり, かつ**その一般の曲線 C が非特異 3 次曲面に含まれるもののうちで極大な** W がひとつ与えられたとする. (W の具体的記述については §2 参照.) この時次の問題を考える.

問題 1.1. W は $(H^S_{d,g})_{\mathrm{red}}$ の既約成分か? もし既約成分なら $H^S_{d,g}$ は W に沿って非被約か?

まず $d > 9$ の時, W の次元は $d+g+18$ である. 一方で $H^S_{d,g}$ の既約成分の次元は $4d$ 以上である為, 問題 1.1 が自明でないような対 (d,g) の領域として

$$\Omega := \left\{(d,g) \in \mathbb{Z}^2 | d > 9, g \geq 3d-18\right\}$$

が考えられる. さらに W の一般元 C に対する cohomology 群 $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3))$ が重要である. Hilbert scheme $H^S_{\mathbb{P}^3}$ の点 $[C]$ における接空間は曲線 $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ の 1 位無限小変形全体であり $H^0(\mathcal{N}_C)$ でパラメトライズされる. 各々の次元の間には次の不等式が成立する:

*代数幾何学城崎シンポジウム (2004 年 10 月 26 日) 報告

†京都大学数理解析研究所

$$\underbrace{\dim W \leq \dim_{[C]} H^S_{\mathbb{P}^3}}_{\text{差は } h^1(\mathcal{I}_C(3)) \text{ 次元}} \leq h^0(\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3}). \tag{1}$$

W の取り方から $H^1(\mathcal{I}_C(3))$ の元は3次曲面の外に出ようとする C の1位無限小変形に対応する. $H^1(\mathcal{I}_C(3)) = 0$ の時, 式 (1) の全ての等号が成立する為 W は $H^S_{d,g}$ の被約な既約成分になり, 問題1.1は自明である. 我々は問題1.1が非自明になる $H^1(\mathcal{I}_C(3)) \neq 0$ の時のうち, $h^1(\mathcal{I}_C(3)) = 1$ の場合に限定して考えた. この時問題1.1の答えは, 次の2つのうちのどちらか1つになる (i.e. dichotomy):

(A) W は $(H^S_{d,g})_{\mathrm{red}}$ の既約成分であり, $H^S_{d,g}$ は W に沿って被約でない.
(B) W を真に含む $H^S_{d,g}$ の既約成分 V が存在しその一般元は非特異3次曲面に含まれない. さらに $H^S_{d,g}$ は W の生成点で非特異である.

我々は (B) が起こらずいつでも (A) になることを示した.

主定理 1.2. $(d, g) \in \Omega$ とする. W を $H^S_{d,g}$ の既約閉部分集合としその一般元 C が非特異3次曲面に含まれるとする. さらに W はそのような集合の中で極大とする. もし $h^1(\mathcal{I}_C(3)) = 1$ なら W は $(H^S_{d,g})_{\mathrm{red}}$ の $(d + g + 18)$ 次元既約成分であり, $H^S_{d,g}$ は W に沿って被約でない.

従って次の予想が $h^1(\mathcal{I}_C(3)) = 1$ の時に正しいことが証明された.

予想 1.3 (Kleppe [4], Ellia [2]). $(d, g) \in \Omega$ とする. W を $H^S_{d,g}$ の既約閉部分集合としその一般元 C が非特異3次曲面に含まれるとする. さらに W はそのような集合の中で極大とする. もし $H^1(\mathcal{I}_C(3)) \neq 0$ かつ $H^1(\mathcal{I}_C(1)) = 0$ なら W は $(H^S_{d,g})_{\mathrm{red}}$ の $(d + g + 18)$ 次元既約成分であり, $H^S_{d,g}$ は W に沿って被約でない.

この予想は最初 Kleppe により [4] において $H^1(\mathcal{I}_C(1)) = 0$ の仮定を伴わない形で予想された. 彼は次の (d, g)-領域で予想が正しいことを証明した: $d \geq 18$ に対しては $g > 7 + (d-2)^2/8$, $14 \leq d \leq 17$ に対しては $g > -1 + (d^2-4)/8$. その後 Ellia は [2] において $d \geq 21$ かつ $g > G(d, 5)$ の時予想が正しいことを証明するとともに, $H^1(\mathcal{I}_C(1)) \neq 0$ の時の反例を示した. ここで $G(d, 5)$ は4次曲面に含まれない d 次曲線の最大種数を表し, $d \gg 0$ の時 $G(d, 5) \approx d^2/10$ である. 我々の主定理は予想1.3に対し彼らの結果を補うものの, 予想の完全解決には至っていない. なお主定理を示す過程において, 曲線 C のある1位無限小変形が2位変形へのリフトの際に障害を受けることを示した (cf. 命題3.1). この結果は Mumford's pathology に対する Curtin [1] の結果の一般化になっている. 一方主定理の応用として $H^S_{\mathbb{P}^3}$ の可算無限個の異なる非被約既約成分を具体的に与えた (cf. 例4.1).

2 3-maximal subsets of $H^S_{d,g}$

まず§1(問題 1.1) で考えた Hilbert scheme の既約閉部分集合 W を非特異 3 次曲面上の因子の線型系を用いて具体的に記述する. [5] において Mumford の与えた集合は具体的には

$$W := \Big\{ C \in H^S_{14,24} \;\Big|\; C \subset {}^\exists S\text{: 非特異 3 次曲面},\quad C \sim 4H + 2E, \\ \text{ただし } H \text{ は } S \text{ の超平面切断}, E \text{ は } S \text{ 上の直線} \Big\}^-$$

である. (ここで $^-$ は $H^S_{14,24}$ における閉包を意味する.) Kleppe [4] はこのような集合を以下のように一般化した. 非特異 3 次曲面 S は, $\mathbb{P}^2$ を一般の 6 点で blow-up したものの $|-K|$ による埋め込みである. $\mathbb{P}^2$ の直線の引き戻し $\mathbf{l}$ と 6 つの例外曲線 $\mathbf{e}_i$ $(1 \le i \le 6)$ の集合は S の Picard 群 $\operatorname{Pic} S$ の自由基底をなすので, S の因子類 $\mathbf{D} = a\mathbf{l} - \sum_{i=1}^6 b_i \mathbf{e}_i$ を 7 整数の組 $(a; b_1, \dots, b_6)$ に対応させることで同型 $\operatorname{Pic} S \simeq \mathbb{Z}^7$ が得られる. 一方 $\operatorname{Pic} S$ には (-2)-因子による鏡映で Weyl 群 $W(\mathbb{E}_6)$ が作用する. この作用のおかげで, S の任意の因子類 $\mathbf{D}$ に対し適当な blow-up $\pi : S \to \mathbb{P}^2$ が存在し, $\operatorname{Pic} S$ の基底 $\{\mathbf{l}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6\}$ に関し

$$b_1 \ge \ldots \ge b_6, \quad \text{かつ} \quad a \ge b_1 + b_2 + b_3 \tag{2}$$

を満たす. このような $W(\mathbb{E}_6)$ に関する標準基底の下で

$$|\mathbf{D}| \ne \emptyset \text{ かつ } |\mathbf{D}| \text{ は固定点自由} \iff b_6 \ge 0 \tag{3}$$

が成り立つ. 従って Bertini の定理から, もし $a > b_1$ かつ $b_6 \ge 0$ なら $|\mathbf{D}|$ の一般元 C は非特異連結曲線であり, 次数 d と種数 g はそれぞれ

$$d = 3a - \sum_{i=1}^{6} b_i, \qquad g = \frac{(a-1)(a-2)}{2} - \sum_{i=1}^{6} \frac{b_i(b_i-1)}{2} \tag{4}$$

となる.

定義 2.1. 条件 (2),(3),(4) 及び $a > b_1$ を満たす 7 整数の組 $(a; b_1, \dots, b_6)$ に対し $H^S_{d,g}$ の既約閉部分集合 $W_{(a;b_1,\dots,b_6)}$ を

$$W_{(a;b_1,\dots,b_6)} := \Big\{ C \in H^S_{d,g} \;\Big|\; C \subset {}^\exists S\text{: 非特異 3 次曲面}, \mathcal{O}_S(C) \simeq \mathcal{O}_S(a; b_1, \dots, b_6) \in \operatorname{Pic} S \Big\}^-$$

で定義し $H^S_{d,g}$ の 3-**極大集合** (3-*maximal subset*) と呼ぶ. (ここで $\mathcal{O}_S(a; b_1, \dots, b_6)$ は S の因子 $\mathbf{D} = a\mathbf{l} - \sum_{i=1}^6 b_i \mathbf{e}_i$ に付随する可逆層を表す.)

3-maximal subset $W_{(a;b_1,\dots,b_6)}$ は $H^S_{d,g}$ の既約閉部分集合であり, その構成の仕方から一般元が非特異 3 次曲面に含まれるもののうちで極大である. また逆に, $H^S_{d,g}$ の既約閉部分集合 W でそのような性質を持つものは適当な $(a; b_1, \dots, b_6)$ に対し 3-maximal subset として $W = W_{(a;b_1,\dots,b_6)}$ と表される. 特に $d > 9$ の時は, そのような $H^S_{d,g}$ の既約閉部分集合と (2),(3),(4) 及び $a > b_1$ を満たす 7 整数の組全体の間に 1 対 1 対応が存在する. 詳しくは [7] を参照されたい.

例 2.2. $g = 3d - 18$ の時 $h^1(\mathcal{I}_C(3)) = 1$ を満たす $H^S_{d,g}$ の 3-maximal subsets W を次数の小さいものから順にあげる.

d	g	3-maximal subset	
14	24	$W_{(12;4,4,4,4,4,2)}$	Mumford's pathology '62 [5]
15	27	$W_{(12;4,4,4,4,3,2)}$	Kleppe'85 [4]
16	30	$W_{(12;4,4,4,3,3,2)}$	Gruson と Peskine'82 [3]
17	33	$W_{(12;4,4,3,3,3,2)}$	—
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

これらは [5],[4],[3] において各々 $H^S_{d,g}$ の非被約既約成分を与えることが示された. しかしその非被約性の証明は全て liaison や背理法を用いた Mumford 的な議論によるものである.

観察 2.3. 上の例からいくつか観察してみよう. 例 2.2 にあげた 3-maximal subsets $W = W_{(a;b_1,\dots,b_6)}$ がいずれも $b_1 \geq \dots \geq b_5 \geq 3$, $b_6 = 2$ を満たしている点に注意されたい. C を W の一般元とし, S は C を含む非特異 3 次曲面, $\mathbf{h}$ $(= -K_S)$ を S の超平面切断類とする. この時 S 上の因子の線型系 $|C - 3\mathbf{h}|$ は, $b_1 \geq \dots \geq b_5 \geq 3$, $b_6 = 2$ より

$$\begin{aligned}|C - 3\mathbf{h}| &= |(a; b_1, \dots, b_6) - 3(3; 1, \dots, 1)| \\ &= |(*; *, \dots, *, -1)| \\ &= \underbrace{|C - 3\mathbf{h} - E|}_{\text{固定点自由}} + \underbrace{E}_{\text{直線}}\end{aligned}$$

と分解する (E は例外曲線 $\mathbf{e}_6$ に対応する直線).

実は次の補題が成立する.

補題 2.4. $d \geq 12$, $g \geq 3d - 18$ とし $W = W_{(a;b_1,\dots,b_6)}$ を $H^S_{d,g}$ の 3-maxmal subset とする. $C, S, \mathbf{h}$ は観察 2.3 と同様の記号使いとする. この時 S 上の線型系 $|C - 3\mathbf{h}|$ の固定部分 F は, Weyl 群 $W(\mathbb{E}_6)$ に関する $\operatorname{Pic} S$ の標準基底の下

$$F = \sum_{\substack{i=1 \\ b_i < 3}}^{6} (3 - b_i)\mathbf{e}_i$$

と表される. さらに同型

$$H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) \simeq H^0(S, \mathcal{O}_F)$$

が成立する. 特に $h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = \sharp\{i | b_i = 2\} + 3(\sharp\{i | b_i = 1\}) + 6(\sharp\{i | b_i = 0\})$ である.

補題から特に次の同値性を得る:

$$h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 1 \iff |C - 3\mathbf{h}| \text{ の固定部分は直線} \iff b_6 = 2 \text{ かつ } b_5 \geq 3. \tag{5}$$

3　空間曲線の変形と障害, 及び主定理の証明

C を $\mathbb{P}^3$ 内の非特異連結曲線とする．$C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ の 1 **位無限小変形**とは $\mathbb{P}^3 \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ の closed subscheme C_ϵ で $\operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ 上 flat で $C_\epsilon \otimes k = C$ を満たすものをいう．C の 1 位無限小変形全体は $\operatorname{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C)$ でパラメトライズされるので, 以降 $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ の 1 位無限小変形と $\operatorname{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C)$ の元を混同して用いる．$\mathbb{P}^3$ 上の層の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0 \tag{6}$$

から誘導される同型 $\delta : \operatorname{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) \to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_C)$ を用いて

$$ob : \operatorname{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C)$$

をカップ積 $ob(\varphi) := \delta(\varphi) \cup \varphi$ で定義する．この時 $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C)$ が 2 位変形 (つまり $k[t]/(t^3)$ 上の変形) にリフトされる為の必要十分条件は $ob(\varphi) = 0$ であり, $ob(\varphi)$ は φ を 2 位変形にリフトする為の**障害** (*obstruction*) と呼ばれる．

実際に障害類を計算して本稿の核となる次の補題を示す．

命題 3.1. S を非特異 3 次曲面, $\mathbf{h}$ を S の超平面切断類とする．S の因子類 $\mathbf{D}$ が次の (i) と (ii) を満たすならば $|\mathbf{D}|$ の一般元 C は非特異連結曲線であり, $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ の 1 位無限小変形 ($k[t]/(t^2)$ 上の変形) でどんな 2 位変形 ($k[t]/(t^3)$ 上の変形) にもリフトしないものが存在する:

(i) 線型系 $|\mathbf{D} - 3\mathbf{h}|$ の固定因子が直線 E である,
(ii) $|\mathbf{D} - 4\mathbf{h}| \neq \emptyset$.

証明の概略.　$|\mathbf{D}|$ の一般元 C が非特異連結曲線になることを示すのは簡単なので省略する．短完全列 (6)$\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)$ より得られる cohomology の長完全列

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_C(3)) \longrightarrow H^1(\mathcal{I}_C(3)) \longrightarrow 0$$

を考える．仮定 (i) より $h^1(\mathcal{I}_C(3)) = 1$ であるから $H^0(\mathcal{O}_C(3))$ の元 u で $\mathbb{P}^3$ 上の斉次 3 次多項式でないものが存在する．層準同型 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \simeq \mathcal{I}_S \hookrightarrow \mathcal{I}_C$ に関手 $\operatorname{Hom}(*, \mathcal{O}_C)$ を施して得られる全射 $\operatorname{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{I}_S, \mathcal{O}_C) = H^0(\mathcal{O}_C(3))$ により u に写される $\operatorname{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C)$ の元を φ とする．命題の証明の為には次を示せば十分である．

主張 3.2. $ob(\varphi) \neq 0$.

主張の証明.　簡単の為に Mumford's pathology の場合 ($C \sim 4\mathbf{h} + 2E$) に限定して証明する．$Z := C \cap E$ とおけば Z は長さ 2 の finite subscheme である．層の包含 $\mathcal{I}_S \hookrightarrow \mathcal{I}_C$ と $\mathcal{O}_C \hookrightarrow \mathcal{O}_C(2Z)$ より誘導される写像 $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) \to H^1(\mathcal{O}_C(3)(2Z))$ を π とし, $\overline{ob}$ を合成写像

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) \arrow[rr, "ob"] \arrow[dr, "\overline{ob}"'] & & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) \arrow[dl, "\pi"] \\
& H^1(\mathcal{O}_C(3)(2Z)) &
\end{tikzcd}$$

で定義する．ここで層 $\mathcal{O}_C(3)(2Z)$ は

$$\mathcal{O}_C(3)(2Z) \simeq \mathcal{O}_S(3\mathbf{h}+2E)\big|_C \simeq \mathcal{O}_S(-\mathbf{h}+C)\big|_C \simeq \mathcal{O}_C(K_C)$$

により C の標準層 $\mathcal{O}_C(K_C)$ に同型であることがわかるが, Čech cohomology を用いて実際に $\overline{ob}(\varphi)$ を計算すると, u のみから定まる $\mathbf{t} = \mathbf{t}(u) \in H^1(\mathcal{O}_C(2Z))$ が存在し, $\overline{ob}(\varphi)$ はカップ積写像

$$H^1(\mathcal{O}_C(2Z)) \times H^0(\mathcal{O}_C(3)) \xrightarrow{\cup_1} H^1(K_C)$$

によるカップ積 $\mathbf{t} \cup_1 u$ に等しいことがわかる．このカップ積写像は C 上の層 $\mathcal{O}_C(2Z)$ に対する Serre duality pairing である．これだけでもかなりわかり易くなったが, さらに $\overline{ob}(\varphi)$ と拡大類

$$\mathbf{e} := [0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(K_S) \longrightarrow \mathcal{O}_S(C+K_S) \longrightarrow \mathcal{O}_C(K_C) \longrightarrow 0]$$

とのカップ積 $\overline{ob}(\varphi) \cup \mathbf{e} \in H^2(K_S)$ を考えるのがみそである．実際, C への制限が $\mathbf{t}$ であるような $H^1(\mathcal{O}_S(2E))$ の 非零元* $\hat{\mathbf{t}}$ が存在し, $\overline{ob}(\varphi) \cup \mathbf{e}$ はカップ積写像

$$H^1(\mathcal{O}_S(2E)) \times H^1(\mathcal{O}_S(3)(-C))) \xrightarrow{\cup_2} H^2(K_S)$$

によるカップ積 $\hat{\mathbf{t}} \cup_2 (u \cup \mathbf{e})$ に等しいことがわかる．このカップ積写像は S 上の層 $\mathcal{O}_S(2E)$ に対しての Serre duality pairing である．u の取り方 (u は 3 次多項式でない) から $u \cup \mathbf{e} \neq 0$ もわかる．従って $\cup_2$ が perfect pairing であることと $H^1(\mathcal{O}_S(2E))$ が 1 次元であることから, 我々は $\overline{ob}(\varphi) \cup \mathbf{e} \neq 0$ を得る．故に $\overline{ob}(\varphi) \neq 0$, 特に $ob(\varphi) \neq 0$ となる． □

従って命題 3.1 も証明された． □

命題 3.1 を用いて主定理 1.2 を示す．

主定理の証明. 定理の W は適当な 7 整数の組 $(a; b_1, \ldots, b_6)$ に対し 3-maximal subset として $W = W_{(a;b_1,\ldots,b_6)}$ と表される．この時 W の一般元 C は仮定から $h^1(\mathcal{I}_C(3)) = 1$ を満たすので, 補題 2.4 により $b_6 = 2$ かつ $b_5 \geq 3$ を得る．従って観察 2.3 で見たように C は命題 3.1 の条件 (i) を満たす．さらに条件 (ii) の方も $(d, g) \in \Omega$ を用いて示される．従って命題より, 曲線 $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ の 1 位無限小変形でどんな 2 位変形にもリフトしないものが存在する．このことは Hilbert scheme が点 $[C]$ において特異であることを意味する．$[C]$ は W の一般の点であるから §1 の dichotomy のうち (A) が成立することがわかる． □

*ここに $|\mathbf{D}|$ 内での C の一般性を用いた．詳しくは注意 3.3(2) を参照．

注意 3.3. (1). 主張3.2の証明においてMumford's pathology以外の一般の場合は, EとdisjointなSの有効因子$\Delta \sim C - 4\mathbf{h} - 2E$を1つ固定する. あとは同型$\mathcal{O}_C(3)(2Z+\Delta) \simeq \mathcal{O}_C(K_C)$を用いてMumford's pathologyの場合と同様, カップ積写像をSerre duality pairingへと帰着させる.

(2). 主張3.2が成立する(すなわちカップ積が零で無い)為にはCの一般性が必要である. 実際Cが$|\mathbf{D}|$の特別な元の時のカップ積は零になり, 従ってCの1位無限小変形は少なくとも2位変形までリフトできる. 特別な元Cは$H^0(\mathcal{O}_C(1)(-2Z)) \neq 0$で特徴づけられ, この時$C$と$E$の交わりの2点$\{p,q\}$(つまり$Z = p+q$)における$C$の接ベクトルが同一平面$H$に含まれる.

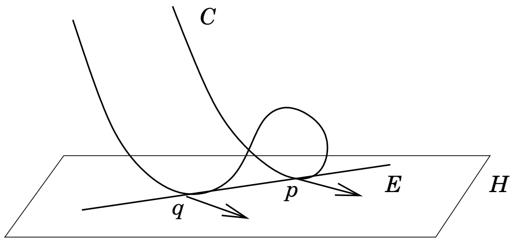

図 1: two tangents on a plane

(3). Mumford's pathologyの場合の命題3.1の主張を初めて証明したのはCurtin [1]である. 我々は彼の証明を一般化することにより命題を証明できた.

4 例

主定理よりHilbert scheme $H^S_{\mathbb{P}^3}$が無限個の被約でない既約成分を持つことがわかる.

例 4.1 (無限個の非被約成分). $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$とする. 3-maximal subsets

$$W_{(\lambda+12;\lambda+3,3,3,3,3,2)} \subset H^S_{d,4d-37}, \qquad (d = 2\lambda+19)$$
$$W_{(\lambda+12;\lambda+4,3,3,3,3,2)} \subset H^S_{d,\frac{7}{2}d-27}, \qquad (d = 2\lambda+18)$$

は$(H^S_{\mathbb{P}^3})_{\mathrm{red}}$の既約成分である. さらに$H^S_{\mathbb{P}^3}$はこれらに沿って非被約である.

一般に与えられた対(d,g)に対しHilbert scheme $H^S_{d,g}$の全ての既約成分を決定するのは困難だが, $H^S_{16,30}$については全ての既約成分が分類されている.

定理 4.2 ([3],[6]). Hilbert scheme $H^S_{16,30}$ は 5 個の既約成分 V_i $(1 \le i \le 5)$ から構成され, V_i の一般元 C_i を含む最低次数の曲面に着目して分類すれば 3 種類に分類される:

種類	既約成分 $^{(\mathrm{dim})}$	一般元 C_i を含む最低次数の曲面
(I)	$V_1^{(64)}$	5 次曲面
(II)	$V_2^{(64)}, V_3^{(64)}$	非特異 3 次曲面
(III)	$V_4^{(68)}, V_5^{(69)}$	非正規 3 次曲面

ここで V_1, V_2 は被約成分, V_3, V_4, V_5 は非被約成分である.

上の分類は最初 Gruson-Peskine [3] によって与えられたが, その証明指針に一部誤りがあり [6] で再証明された. 証明には liaison と 3 次曲面の分類を用いる. $H^S_{16,30}$ の 5 個の既約成分のうち, V_2 と V_3 は一般元が非特異 3 次曲面に含まれるような既約成分である. 一方は被約であるが, 他方は非被約である. 実際 $V_2 = W_{(12;5,3,3,3,3,3)}$ かつ $(V_3)_{\mathrm{red}} = W_{(12;4,4,4,3,3,2)}$ となる. ここで $H^S_{16,30}$ の既約成分の過半数が非被約であり, 特に最大次元の既約成分 V_5 も非被約であることに注意されたい. 例 4.1 や定理 4.2 により Hilbert scheme の非被約性は自然な現象に感じられる.

$H^S_{16,30}$ の既約成分の分類からもわかるように, Hilbert scheme の既約成分のうちその一般元が良く知られた曲面に含まれるようなものを分類することは, 全ての既約成分を知る為のまず第一歩といえる. ここに問題 1.1 のもう一つの動機がある. つまり次の様な分類問題を考える上でも, 問題 1.1 は重要である.

問題 4.3. Hilbert scheme $H^S_{\mathbb{P}^3}$ の既約成分のうち一般元が非特異 3 次曲面に含まれるようなものを全て分類せよ.

$(H_{\mathbb{P}^3})_{\mathrm{red}}$ の既約成分になる 3-maximal subset $W_{(a;b_1,\ldots,b_6)}$ を全て決定

$$\Downarrow$$

問題 4.3 が解決

最後に予想 1.3 において W の一般元 C に対する線型正規性 $(\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} H^1(\mathcal{I}_C(1)) = 0)$ の仮定が必要である理由について述べる. $(d,g) \in \Omega$ の時, もし W の一般元 C が $h^1(\mathcal{I}_C(1)) \neq 0$ を満たすなら $W \subset H^S_{d,g}$ は 3-maximal subset として

$$W = W_{(a;b_1,\cdots,\underbrace{0,\cdots,0}_{h^1(\mathcal{I}_C(1))})}$$

と表される. つまり $b_6 = 0$ を満たす. このことから C は 4 次 Del Pezzo 曲面 $S_4 \subset \mathbb{P}^4$ 上の曲線

C' を点 $p \in S_4 \setminus C'$ から射影した曲線であることがわかる.

$$\begin{array}{ccccl} \mathbb{P}^4 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^3 & & (\text{点 } p \text{ からの射影}) \\ \cup & & \cup & & \\ p \in S_4 & \dashrightarrow & S_3 = S & & (\text{Del Pezzo 曲面}) \\ \cup & & \cup & & \\ C' & \simeq & C. & & \end{array}$$

S_4 の外の点 p' からの C' の射影を考えることにより, 曲線 C はどの 3 次曲面にも含まれない曲線 $\tilde{C}$ へと実際に変形する. 従って W を真に含む $(H^S_{d,g})_{\mathrm{red}}$ の既約成分 V が存在し, W は既約成分にならない. 故に予想 1.3 において C に対する線型正規性の仮定は必要である. 我々の主定理の場合は仮定 $h^1(\mathcal{I}_C(3)) = 1$ から $H^1(\mathcal{I}_C(1)) = 0$ が従うので必要無い.

予想 1.3 は $h^1(\mathcal{I}_C(3)) > 1$ の場合には一般に未解決である. この場合, W が $(H^S_{\mathbb{P}^3})_{\mathrm{red}}$ の既約成分であるかどうかの判定は, §1 で見た (A) と (B) の間の単純な dichotomy ではないので問題はより複雑である.

参考文献

[1] D. Curtin, *Obstructions to deforming a space curve*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), 83–94.

[2] P. Ellia, *D'autres composantes non réduites de* Hilb $\mathbb{P}^3$, Math. Ann. **277** (1987), 433–446.

[3] L. Gruson, C. Peskine, *Genre des courbes de l'espace projectif (II)* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **15** (1982), no. 3, 401–418.

[4] J. O. Kleppe, *Non-reduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves*, Proc. Rocca di Papa 1985, Lecture Notes in Math. **1266**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, pp.181–207.

[5] D. Mumford, *Further pathologies in algebraic geometry*, Amer. J. Math. **84** (1962), 642–648.

[6] H. Nasu, *Classification of space curves of degree* 16 *and genus* 30, preprint (2004).

[7] H. Nasu, *Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme*, preprint (2004), to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, JAPAN.
e-mail address : nasu@kurims.kyoto-u.ac.jp