An example of a generically non-reduced component of the Hom scheme

向井 茂 (京大・数理研)・那須 弘和 (京大・数理研)

概型 C と V を固定したとき, それらの間の射 $f: C \to V$ の全体には, 自然な概型の構造が入る．これを Hom 概型と呼び $\mathrm{Hom}(C, V)$ で表す．V の射影埋め込み $V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ を固定したとき, 次数 d の射全体は open かつ closed である．これを $\mathrm{Hom}_d(C, V)$ で表す．以下 C, V は非特異とする．良く知られているように, 点 $[f]$ における $\mathrm{Hom}(C, V)$ の Zariski 接空間は $H^0(C, f^*\mathcal{T}_V)$ と同型で

$$\dim_{[f]} \mathrm{Hom}(C, V) \leq \dim H^0(C, f^*\mathcal{T}_V)$$

が成立する．しかし, $\mathrm{Hom}(C, V)$ の生成的に被約でない成分では, この次元評価は至るところ sharp でない．生成的に被約でない例は特別な 3 次元 Fano 多様体 V に対する $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, V)$ しか知られていなかった ([2, §3], [3, §6])．

ここでは簡単な多様体 V と非有理曲線 C でも $\mathrm{Hom}(C, V)$ に生成的に被約でない成分が現れることを報告する．V としては Fermat 型 cubic 3-fold

$$V = V_3^{\mathrm{Fermat}} : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 \quad \subset \mathbb{P}^4,$$

C としては $\mathbb{P}^4$ 内の一般の $(2, 2, 2)$ 型完全交叉とする．C は種数 5 の曲線で, モジュライ的に一般である．

定理 1. $\mathrm{Hom}_8(C, V_3^{\mathrm{Fermat}})$ は生成的に被約でない 4 次元既約成分 T をもつ．

簡単な議論により一般の cubic 3-fold V_3 に対しても同様のことが成立することがわかる．

C の V_3 への次数 8 の埋め込みは 2 種類ある．線形正規な埋め込みに対応する点では $\mathrm{Hom}(C, V_3)$ は非特異 4 次元である．定理の既約成分 T の一般元

f は線形正規でない埋め込みである．このとき，線形包 $\langle f(C) \rangle$ は $\mathbb{P}^3$ で, 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{cccccccc} & \mathbb{P}^4 & \supset & C & & V_3 & \subset & \mathbb{P}^4 \\ \text{一般点からの射影} & \downarrow & & \downarrow & & \cup & & \uparrow \\ & \mathbb{P}^3 & \supset & C & \hookrightarrow & H \cup V_3 & \subset & H \simeq \mathbb{P}^3 \end{array}$$

定理 1 の証明は Mumford の有名な病例 [4] ($\mathrm{Hilb}^S_{14,24}\,\mathbb{P}^3$ の非被約性) と同様であるが, より精密に Curtin [1], Nasu [5] の議論を用いることにより次が示せる.

定理 2. 一般の $[f] \in T$ に対する $H^0(C, f^*\mathcal{T}_V)$ の一般元 α に対応する 1 位無限小変形 ($\mathbb{C}[t]/(t^2)$ 上の変形) は $\mathbb{C}[t]/(t^3)$ 上の変形に持ち上がらない．すなわち $0 \neq \mathrm{ob}(\alpha) \in H^1(C, f^*\mathcal{T}_V)$ である.

定理 1,2 は非特異 cubic 3-fold $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ の Hilbert 概型に対する同様の主張 (生成的に被約でない成分の存在) を使って証明する．その際, 3 次曲面のモジュライ空間への有理写像

$$\varphi_{V_3} : (\mathbb{P}^4)^* \dashrightarrow \mathfrak{M}_{\mathrm{cubic}}, \qquad [H] \mapsto [H \cap V_3]$$

の支配性が必要になる．V_3^{Fermat} に対しては Sylvester の 5 面体定理よりこれが従う.

問題 3. 非特異な $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ に対して φ_{V_3} はいつも支配的か?

References

[1] D. Curtin, Obstructions to deforming a space curve, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), 83–94.

[2] V.A. Iskovskih, Fano 3-folds. II, Math. USSR Izvestija, **12**(1978), 469–506.

[3] S. Mukai and H. Umemura, Minimal rational threefolds, *Algebraic Geometry* (Tokyo/Kyoto, 1982), Lecture Notes in Math. **1016**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, pp.490–518,

[4] D. Mumford, Further pathologies in algebraic geometry, Amer. J. Math. **84** (1962), 642–648.

[5] H. Nasu, Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme, math.AG/0505413, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.