Deformations of degenerate curves on the product of $\mathbb{P}^1$ and $\mathbb{P}^2$

那須 弘和 (京大・数理研)

$V \subset \mathbb{P}^n$ を射影空間に埋め込まれた3次元射影多様体とする. V 上の曲線 C が超平面切断 $S = V \cap H$ ($H = \mathbb{P}^{n-1}$) に含まれるとき C は**退化している (degenerate)** と云う. 退化曲線は V 上の曲線の中でも特殊であり, いつ非退化曲線に変形するかは基本的な問題である. ここでは C の V 上での小変形 C' がすべて退化しているとき, C は**安定的に退化している (stably degenerate)** と云う. [3] では V が del Pezzo (すなわち $-K_V = 2H$, H は V 上の豊富因子) の場合に退化曲線 C が stably degenerate である為の十分条件を与えた. 本講演では V が $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ の $\mathbb{P}^5$ への Segre 埋め込みの場合に必要十分条件を与える. このとき非特異な切断 S はスクロール $\mathbb{F}_1 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ と同型になる. 以下では V 上の非特異連結曲線の Hilbert scheme を $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ で表す.

定理. *$V \subset \mathbb{P}^5$ を Segre 埋め込み $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ の像とし, $S \subset V$ はその非特異超平面切断, $C \subset S$ をその上の非特異連結曲線とする. このとき次が成り立つ:*

(1) *C が stably degenerate である為には $\chi(V, \mathcal{I}_C(1)) \geq 1$ が必要かつ十分である.*

(2) *C_0 と f を各々$\mathbb{P}^1$ 束 $S \to \mathbb{P}^1$ の負切断とファイバーとする.*

- [i] *もし整数 $n \geq 5$ に対し $C \sim n(C_0 + f)$ ならば, $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ は $[C]$ の近傍で被約でない (non-reduced).*
- [ii] *さもなければ $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ は $[C]$ で非特異である.*

良く知られているように $S \simeq \mathbb{F}_1$ は $\mathbb{P}^2$ の1点爆発と同型である. 定理により C が n 次平面曲線 ($n \geq 5$) の引き戻しならば (またそのときに限り), C は V 上の**被障害変形 (obstructed deformation)** を持つ. $n = 5$ の場合のこの事実は赤堀氏と難波氏の結果 [1] により既に知られていた. 非特異平面5次曲線 $D \subset \mathbb{P}^2$ に対し, 外点 $p \in \mathbb{P}^2 \setminus D$ からの射影 $\pi_p : D \to \mathbb{P}^1$ のグラフ $\Gamma \subset D \times \mathbb{P}^1$ が被障害1位無限小変形を持つことを

我々と異なる方法で示している．整数対 (a,b) でもって曲線 $C \sim aC_0 + bf$ が stably degenerate である領域と obstructed deformation を持つ半直線は図 1 のようになる．

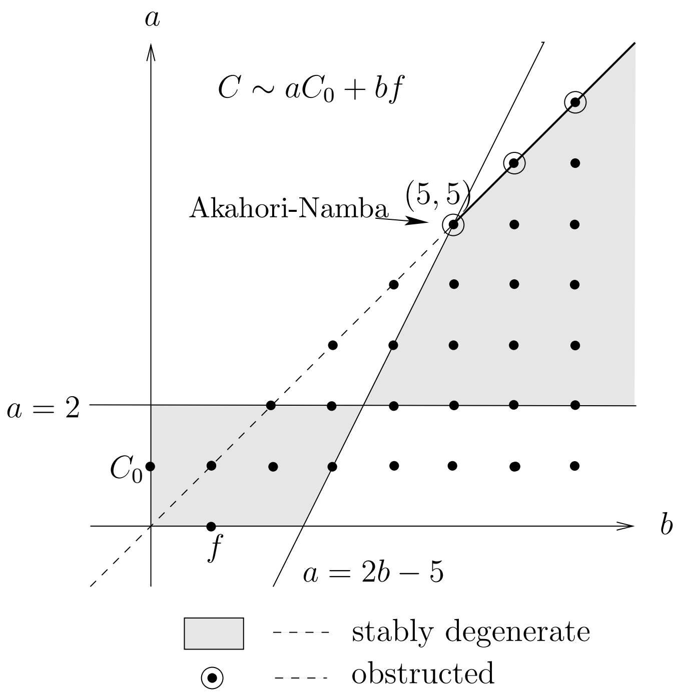

図 1: Stably degenerate curves and obstructed curves

証明は [3] で扱った del Pezzo の場合より幾分易しい．同様に S 上の第 1 種例外曲線 C_0 に着目する．$(C.C_0)_S \geq 1$ または $H^1(N_{S/V}\big|_C) = 0$ の場合には一般論から従う．そうでない場合には S の全て変形の外に出ようとする C の 1 位無限小変形が存在するが, [2] の障害性判定定理を適用することにより obstructed であることがわかる．

参考文献

[1] T. Akahori and M. Namba, Examples of obstructed holomorphic maps, *Proc. Japan Acad. Ser.A*, **54** (1978), no. 7, pp.189–191.

[2] S. Mukai and H. Nasu, Obstructions to deforming curves on a 3-fold, I: A generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes, to appear in *J. Algebraic Geom.*, math.AG/0609284 (2006).

[3] H. Nasu, Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II: Deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold, math.AG/0609286 (2006).

[4] H. Nasu, Deformations of degenerate curves on a Segre 3-fold, preprint (2007).