

Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II

–deformation of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold–

那須 弘和 (京大・数理研)

C を非特異 3 次元射影多様体 V 内の非特異曲線とする. C の V 内での変形を $C \subset S \subset V$ を満たす曲面 S を用いて調べる. 一般に C の S 内での変形と S の V 内での変形がともに良く振る舞うとしても, C の V 内での変形は悪く振る舞うことがある. 例えば $\text{Hilb } V$ と $\text{Hilb } S$ が点 $[S]$ と点 $[C]$ においてともに非特異かつ期待次元 (それぞれ $\chi(S, N_{S/V})$ と $\chi(C, N_{C/S})$) であっても, $\text{Hilb } V$ は $[C]$ を通るある既約成分上で generically non-reduced である (cf. Mumford の例 [3]). 一つ目の講演では特に制限写像

$$\rho : H^0(S, N_{S/V}) \longrightarrow H^0(C, N_{S/V}|_C)$$

が全射でないときにこのような非被約性の現象がよく起こることを報告した. ρ が全射でないとき, S を脱出しようとする C の V 内での 1 位無限小変形が存在する. 本講演では次の問題を考える.

問題. 曲線 $C \subset V$ の変形は曲面 $S \subset V$ の変形にどのような条件のもとで含まれ続けるか?

もし ρ が全射なら, C の V 内での全ての (小) 変形は S と代数的同値な V の因子 S' に含まれる. このようなときに C は stably degenerate であるという.

以下曲線 C の V 内でのイデアル層を \mathcal{I}_C , 次数と種数を d と g で表す. Kleppe[2] はこの問題を $V = \mathbb{P}^3$ 内の曲線 C が非特異 3 次曲面 S に含まれる場合に考えた. さらに線形正規な曲線 C に対し $\chi(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = g - 3d + 19 \geq 1$, $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) \neq 0$ なら $C \subset V$ は stably degenerate であることを予想した. 我々は彼の予想を証明するための試験場として非特異 del Pezzo 3-fold V 内の曲線 C が偏極類 $|H|$ の非特異元 S に含まれる場合にこの問題を考え, 次の定理を得た.

定理. (V, H) を次数 n の非特異 3 次元 del Pezzo 多様体とする. C は V 内の非特異曲線で非特異曲面 $S \in |H|$ に含まれ, 次数は d , 種数は $g \geq d - n$ とする. もし

S 上の直線 E で C と交わらないものが, 全て good line (すなわち法束 $N_{E/V}$ が自明) ならば, $C \subset V$ は *stably degenerate* である.

我々の設定では $\chi(V, \mathcal{I}_C(S)) \geq 1$ は $g \geq d - n$ と同値になる. 系として $\text{Hilb } \mathbb{P}^3$ に関する Kleppe-Ellia 予想 (cf. [2, 予想 4],[1]) の del Pezzo 3-fold 版を証明する. V 内の非特異曲線の Hilbert scheme を $\text{Hilb}^{sc} V$ で表す. 点 $[C]$ を含み, 次の性質を満たす $\text{Hilb}^{sc} V$ の既約閉部分集合 W で極大なものを C の S -maximal family と呼び, 記号 $W_{S,C}$ で表す.

性質: W の全ての一般元 C に対し C を含むような $S \subset V$ の変形が存在する.

系. 定理の仮定の下, C の S -maximal family $W_{S,C} \subset \text{Hilb}^{sc} V$ は $(\text{Hilb}^{sc} V)_{\text{red}}$ の既約成分である. さらに $\text{Hilb}^{sc} V$ は $H^1(V, \mathcal{I}_C(S)) = 0$ のとき $W_{S,C}$ に沿って生成的に非特異, $H^1(V, \mathcal{I}_C(S)) \neq 0$ のときは $W_{S,C}$ に沿って生成的に非被約となる.

$g \geq 2$ のとき $\dim W_{S,C} = d + g + n$ である. $W_{S,C}$ の一般点 $[C]$ における $\text{Hilb } V$ の Zariski 接空間の次元は $\dim W_{S,C}$ に index of abnormality $h^1(V, \mathcal{I}_C(S))$ を加えたものに等しい. もし $H^1(V, \mathcal{I}_C(S)) = 0$ ならば, $\text{Hilb}^{sc} V$ は点 $[C]$ の近傍で $W_{S,C}$ と同型になる.

定理の証明には ρ が全射でないとき $C \subset V$ の 1 位無限小変形が 2 位変形へのリフトの際に障害を受けることを $S \subset V$ の極付き一位無限小変形を用いて証明する. このとき [4] で用いられた障害類の計算を del Pezzo という良い条件のもとで精密化し, 適用する.

References

- [1] P. Ellia, D'autres composantes non réduites de $\text{Hilb } \mathbb{P}^3$, *Math. Ann.*, **277**(1987), 433–446.
- [2] J. O. Kleppe, Non-reduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves, *Lecture Notes in Math.*, **1266**(1985), 181–207.
- [3] D. Mumford, Further pathologies in algebraic geometry, *Amer. J. Math.*, **84**(1962), 642–648.
- [4] S. Mukai and H. Nasu, Obstructions to deforming curves on a 3-fold, – a generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes, in preparation.