Obstructions to deforming curves on a 3-fold, I

– a generalization of Mumford's example to a uniruled 3-fold–

向井 茂 (京大・数理研)・那須 弘和 (京大・数理研)

Mumford[2] は射影空間の Hilbert 概型 Hilb $\mathbb{P}^3$ の生成的に非被約 (generically non-reduced) な既約成分を発見した．具体的には次のとおりである．

例. $S_3 \subset \mathbb{P}^3$ は非特異 3 次曲面で E はその中の直線, $C \subset S_3$ は S_3 上の線形系 $|4h+2E| \simeq \mathbb{P}^{37}$ に属する非特異曲線とする．このような C は Hilb $\mathbb{P}^3$ の局所閉既約部分集合 $W = W^{56}$, ($|3H| \simeq \mathbb{P}^{19}$ 上の $\mathbb{P}^{37}$-束の開部分集合) によりパラメータづけられる．ただし，H は平面で h はそれの S_3 への制限である．このとき，Hilb $\mathbb{P}^3$ は W に沿って生成的に非被約である．

ここでは次の 2 条件をみたす単線織 (uniruled) な 3-fold V にこれを拡張する．

(A) V は有理曲線 $E \simeq \mathbb{P}^1 \subset V$ とその変形でもって覆われる．(よって，法束 $N_{E/V}$ は大域切断で生成される．)

(B) $V \supset S \supset E$ なる非特異曲面 S でもって $(E^2)_S = -1$ と $h^1(\mathcal{O}_S(S)) = p_g(S) = 0$ をみたすものが存在する．

上の例 ($V = \mathbb{P}^3$) 以外にも cubic 3-fold や $\mathbb{P}^1$ 束 (底曲面は $p_g = 0$) 等がこの 2 条件をみたす．

定理. 非特異射影的 3 次元多様体 V が上の 2 条件をみたすなら，その上の非特異曲線の Hilbert 概型は生成的に非被約な既約成分 $\tilde{W}$ をもつ．

$\tilde{W}$ の一般元 $C \subset V$ に対して，C を含む S の変形が一意的に存在する．しかし，そこから脱出しようとする C の 1 位無限小変形*α があるた

*Spec $k[t]/(t^2)$ 上の変形．法束 $N_{C/V}$ の大域切断と同一視する．

めに対応する点 $[C]$ における Hilbert 概型の接空間は $\tilde{W}$ の次元より大きい．このような 1 位無限小変形 α がすべて obstructed†であるために $\tilde{W}$ が Hilbert 概型の生成的に非被約な成分になる．

Curtin[1] や Nasu[3] による $C \subset S_3$ の $\mathbb{P}^3$ 内での 1 位無限小変形 α に対する障害類 $\mathrm{ob}(\alpha) \in H^1(N_{C/V})$ の計算 (実質的には法束の射影 $\pi : N_{C/V} \to N_{S/V}\big|_C$ による像 $\pi(\mathrm{ob}(\alpha))$) を一般の 3-fold V 内での変形に拡張することによって定理を証明する．

(1) $C \subset S$ をうまく選ぶ．

(2) $C \subset V$ の 1 位無限小変形 α の射影 $\pi(\alpha)$ が $N_{S/V}(E)$ の大域切断 v ($S \subset V$ の極付き 1 位無限小変形) に持ち上がる．

(3) v の「障害類」の E への制限に相当するもの ($\mathrm{ob}(v)\big|_E$ で表す) があって，カップ積の等式 $\pi(\mathrm{ob}(\alpha)) \cup \mathbf{k}_C = \mathrm{ob}(v)\big|_E \cup \mathbf{k}_E$ をみたす．‡

(4) $\mathrm{ob}(v)\big|_E \in H^1(\mathcal{O}_E(2E))$ は法束の完全列

$$0 \longrightarrow N_{E/S} \longrightarrow N_{E/V} \longrightarrow N_{S/V}\big|_E \longrightarrow 0$$

(条件 (A) より分裂しない) の拡大類と交わり $C \cap E$ から計算でき，零でない．さらに，C の選び方より，$\mathrm{ob}(v)\big|_E \cup \mathbf{k}_E$ も零でない．

(5) よって，α の障害類 $\mathrm{ob}(\alpha)$ が零でない．

References

[1] D. J. Curtin, Obstructions to deforming a space curve, *Trans. Amer. Math. Soc.* **267**(1981), 83–94.

[2] D. Mumford, Further pathologies in algebraic geometry, *Amer. J. Math.* **84**(1962), 642–648.

[3] H. Nasu, Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **42**(2006), 117–141.

---

†2 位無限小変形, すなわち $\mathrm{Spec}\, k[t]/(t^3)$ 上の変形に持ち上がらない．

‡$\mathbf{k}_C, \mathbf{k}_E$ は構造層のイデアル層による拡大類を表す．