

# Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of Hilb $\mathbb{P}^3$

那須 弘和 (京大・数理研)

$\mathbb{P}_k^3$  (体  $k$  は代数閉, 標数 0) 内の種数  $g$  次数  $d$  の非特異連結曲線 (以下では曲線) の Hilbert scheme を  $H_{d,g}^S$  で表す. 我々は  $[N]$  において  $H_{16,30}^S$  が可約であり 5 つの既約成分からなることを示した. しかし一般には与えられた対  $(d, g)$  に対し  $H_{d,g}^S$  の全ての既約成分を分類するのは困難である.  $H_{16,30}^S$  の分類を可能にしたのは次の事実である: 既約成分の一般の曲線が含まれる最低次数曲面を考えた時それらは比較的 low degree (3 次から 5 次まで) の曲面である. つまり既知の low degree 曲面の分類を用いてその上の曲線の性質を導き成分の分類が可能になった. このように一般の曲線が良く知られた曲面に含まれるような Hilbert scheme の既約成分を決定するのは全ての成分を知る為のまず第一歩といえよう. そこで我々は以下の問題を考える.

問題. Hilbert scheme の既約成分のうち, その一般の曲線が非特異 3 次曲面に含まれるようなものを全て決定せよ.

その為にもまず  $H_{d,g}^S$  の局所閉既約部分集合であり, かつその一般の曲線がある非特異 3 次曲面に含まれるもののうちで極大な  $W$  がひとつ与えられたとする. この時その  $H_{d,g}^S$  内における閉包  $\bar{W}$  が既約成分かという問を考える. 我々のこの問に対するアプローチは以下の通りである.  $W$  の一般の曲線  $C$  を含む一般の 3 次曲面を  $S$  とする.  $C$  を  $S$  上の因子と考え  $W$  に対し  $C$  の因子類  $D \in \text{Pic } S \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 7}$  を対応させる. この対応により  $D$  に対応する極大集合  $W \subset H_{d,g}^S$  を  $W_D$  で表す. この時簡単な考察から次が導かれる:  $h$  を  $S$  の超平面切断類とする. 対  $(d, g)$  が領域  $\Omega := \{(d, g) \in \mathbb{Z}^2 \mid d \geq 14, g \geq 3d - 18\}$  (この領域は上の問が意味を持つ自然な領域である.) に属し, もし  $S$  上の線型系  $|D - 3h|$  が自由なら  $\bar{W}_D$  は  $H_{d,g}^S$  の被約な  $d + g + 18$  次元既約成分である. 従って我々の次の関心は  $|D - 3h|$  が固定部分を持った場合についてである. この場合に関し次の定理を得た.

定理.  $S$  を非特異 3 次曲面,  $h$  を  $S$  の超平面切断類とし,  $D$  は次を満たす  $S$  の因子類とする.

- (1) 線型系  $|D - 3h|$  の固定因子は直線  $E$  である.

$$(2) (\mathbf{D} - 3\mathbf{h} - E)^2 > 0.$$

$$(3) |\mathbf{D} - 4\mathbf{h}| \neq \emptyset.$$

この時  $|\mathbf{D}|$  の一般の元  $C$  は非特異連結曲線であり、かつ  $C$  の  $\mathbb{P}^3$  内におけるある 1 位変形は 2 位変形にリフトしない。

定理を補足説明する.  $C, S$  を定理の曲線と曲面とする. この時  $S$  の外へ飛び出ようとする  $C$  の 1 位変形 ( $\text{Spec } k[t]/t^2$  上の変形) のうち 2 位変形 ( $\text{Spec } k[t]/t^3$  上の変形) にリフトしようとした時障害を受けるものが存在する. 特に Hilbert scheme が点  $[C]$  において特異である. より具体的には Hilbert scheme の点  $[C]$  における接空間  $H^0(\mathcal{N}_C)$  から障害空間  $H^1(\mathcal{N}_C)$  への cup 積写像を介したある 2 次写像  $\pi$  を考える. この時  $\pi$  により  $C$  のある 1 位変形が非零元 (1 位障害) へと写される. 非被約成分の最初の例である Mumford 病例 [M] ( $C \sim 4\mathbf{h} + 2E$ ) に対しては Curtin [C] が同様の事を示している. 我々はこの証明を一般化することにより定理を導いた. 定理の応用として次が得られる.

系.  $(d, g) \in \Omega$  とする. この時定理の条件を満たす因子類  $\mathbf{D}$  に対応する  $\bar{W}_{\mathbf{D}} \subset H_{d,g}^S$  は  $H_{d,g}^S$  の  $d + g + 18$  次元既約成分である. さらに非被約である.

3 次曲面  $S$  を  $\mathbb{P}^2$  の 6 点 Blow-up と同一視した時の  $\text{Pic } S \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 7}$  の自由基底は  $\mathbb{P}^2$  の直線の引き戻しと 6 つの例外曲線から構成される. この基底に関する類  $\mathbf{D}$  の座標が  $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$  の時  $W_{\mathbf{D}} = W_{(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)}$  と書く.

例.  $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  とする. この時

$$\bar{W}_{(\lambda+12; \lambda+3, 3, 3, 3, 3, 2)} \subset H_{d, 4d-37}^S, \quad (d = 2\lambda + 19)$$

$$\bar{W}_{(\lambda+12; \lambda+4, 3, 3, 3, 3, 2)} \subset H_{d, \frac{7}{2}d-27}^S, \quad (d = 2\lambda + 18)$$

は非被約既約成分である.

さらに系により Kleppe [K] により予想され Ellia [E] によって修正された Hilbert scheme の非被約成分に関するある予想が最も単純な場合に証明された.

## References

- [C] D. Curtin, *Obstructions to deforming a space curves*, Trans. Amer. Math. Soc., **267**, (1981), 83–94.
- [E] P. Ellia, *D'autres composantes non réduites de Hilb  $\mathbb{P}^3$* , Math. Ann., **277**, (1987), 433–446.
- [K] J. O. Kleppe, *Non-reduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves*, Lecture Notes in Mathematics, **1266**, Springer Verlag, Berlin-New York, (1985).
- [M] D. Mumford, *Further pathologies in algebraic geometry*, Amer. J. Math., **84**, (1962), 642–648.
- [N] H. Nasu, *Classification of space curves of degree 16 and genus 30*, preprint.