A non-reduced component of the Hilbert scheme of space curves

那須 弘和 (京大・数理研)

Mumford は [M] に於て $\mathbb{P}^3_k$ (体 k は代数閉、標数 0) 内の非特異連結曲線 (以下曲線) の Hilbert scheme の非被約既約成分の存在を示した. 以来 Gruson-Peskine, Kleppe, Ellia 達により様々な非被約成分の存在が確認されてきた ([GP],[K],[E]). 100 年以上前の Halphen の分類以来非特異 3 次曲面 (以下 3 次曲面) 上の曲線は良く研究され, Mumford, Kleppe, Ellia の非被約成分の例も 3 次曲面上の曲線の族により構成された. 次数 d, 種数 g の曲線の Hilbert scheme $H^S_{d,g}$ の局所閉既約部分集合 W で一般の曲線が 2 次以下の曲面に含まれずある唯一の 3 次曲面に含まれるもののうち極大なものを $H^S_{d,g}$ の 3-maximal subset と呼ぶことにする. 3 次曲面 S を $\mathbb{P}^2$ の 6 点 Blow up と同一視し, Weyl 群 $W(\mathbb{E}_6)$ の Pic$S \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 7}$ への作用に関する対称性と共にその因子類を考えれば, $H^S_{d,g}$ の 3-maximal subset は次を満たす 7 整数の組 $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ と一対一に対応する.

$$\left.\begin{array}{l} a \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_6 \geq 0, \quad a \geq b_1 + b_2 + b_3, \quad a > b_1, \\ d = 3a - \displaystyle\sum_{i=1}^{6} b_i, \quad g = \binom{a-1}{2} - \sum_{i=1}^{6} \binom{b_i}{2}. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

与えられた $d > 9, g$ に対し $(*)$ の解を求め, それぞれに対し次の問題を考える.

Question 対応する 3-maximal subset $W(a; b_1, \ldots, b_6)$ の閉包は Hilbert scheme $H^S_{d,g}$ 内で既約成分を成すか？もし既約成分なら非被約か？

$(*)$ の解は $d + g + 18$ 次元の $H^S_{d,g}$ の部分集合を与える. 一方で $H^S_{d,g}$ の既約成分の最低次元は $4d$ であることが良く知られているので, 我々は特に $g = 3d - 18$ の時に着目して $(*)$ の解を考える. $10 \leq d \leq 13$ の時, 解が一つ存在し, いずれも被約成分を与える. $d = 14$ の時, 二つの解のうち一つは Mumford の非被約成分を与える. $d = 15, 16$ の時は [GP],[K] の中で考察され, それぞれ非被約成分を与える解がひとつずつ存在する. 我々は $d = 17$ の時 liaison を用いてこの次数と種数の曲線を部分的に分類し次の結果を得た.

Theorem 1 種数 33 の非特異連結 17 次曲線の *Hilbert scheme* $H^S_{17,33}$ に於て $\dim H^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_X(3)) \leq 1$ を満たす曲線 X 全体からなる $H^S_{17,33}$ の *open subscheme* は次の 3 つの 68 次元の既約成分 V_1, V_2, V_3 より構成される：

V_1*:* 一般の曲線は二つの 5 次曲面の完全交差に含まれる.
V_2*:* 一般の曲線は非特異 3 次曲面に含まれ因子類 $(12; 4, 4, 3, 3, 3, 2)$ に含まれる.
V_3*:* 一般の曲線は非特異 3 次曲面に含まれ因子類 $(13; 6, 4, 3, 3, 3, 3)$ に含まれる.

V_1, V_3 は被約であるが*,* V_2 は非被約である*.*

さらに証明の中で V_1 の一般の曲線が arithmetically Buchsbaum であることを示した.

一方で V_3 は, $d > 9$ の時典型的に現れる被約成分である. さらに次数 d が十分大きければ一般の曲線が非特異 3 次曲面に含まれる $H^S_{d,3d-18}$ の既約成分はこの種の成分しか現れず、実際に唯一つ存在することがわかる.

Theorem 2 $d \geq 91$ の時*, Hilbert scheme* $H^S_{d,3d-18}$ の 3*-maximal subset* W は次数 d より一意的に定まる：

$$\begin{array}{ll} W(\frac{d+9}{2}; \frac{d-5}{2}, 4, 3, 3, 3, 3) & d \text{ が奇数の時} \\ W(\frac{d+8}{2}; \frac{d-6}{2}, 3, 3, 3, 3, 3) & d \text{ が偶数の時} \end{array}$$

これらの $H^S_{d,3d-18}$ 内での閉包は $H^S_{d,3d-18}$ の被約な既約成分を与える*.*

References

[E] P. Ellia, *D'autres composantes non réduites de* Hilb$\mathbb{P}^3$, Math. Ann.,**277**(1987), 433–446.

[GP] L. Gruson, C. Peskine, *Genre des courbes de l'espace projectif (II)* Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. **15**(1982), 401–418.

[K] J. O. Kleppe, *Non-reduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves*, Lecture Notes in Mathematics, **1266**, Springer Verlag, Berlin-New York, (1985).

[M] D. Mumford, *Further pathologies in algebraic geometry*, Amer. J. Math.,**84**(1962), 642–648.