工科の線形代数 1, 期末試験直前演習

2018/7/9 工学部・機械工学科

問 1. 次の行列に対して、逆行列が存在するならば逆行列を求め、存在しないならば**非正則**と記せ。

(1) $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -5 & 7\end{pmatrix}$　(2) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -9 & 3\end{pmatrix}$　(3) $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}$　(4) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$

問 2. 次の行列式 $|A|$ の値を求めよ。

(1) $|A|=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 9\end{vmatrix}$　(2) $|A|=\begin{vmatrix}7 & 8\\ 9 & 10\end{vmatrix}$　(3) $|A|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 15 & -10\end{vmatrix}$

問 3. 次の行列 A の固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ。(どの固有値に対する固有ベクトルかについて明らかにして答えること)

(1) $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$　(2) $A=\begin{pmatrix}11 & -4\\ 12 & -3\end{pmatrix}$　(3) $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$　(4) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

問 4. 行列 A を $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ と定める.

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 2 次正則行列 P を与えよ. (A を対角化せよ.)

(2) (1) の P を用いて, A を対角化した行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) 自然数 n に対し, A の n 乗を求めよ.

---

[0]略解：

問 1. (1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & -3\\ -5 & -2\end{pmatrix}$　(2) 非正則　(3) $A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}9 & -5\\ -7 & 3\end{pmatrix}$　(4) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 9 & -6\\ -1 & -7 & 5\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$

問 2. (1) 3　(2) −2　(3) 0

問 3. (1) $\lambda=2,5$. $\lambda=2$ のとき $\mathbf{x}_1=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$, $c_1\neq 0$. $\lambda=5$ のとき $\mathbf{x}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, $c_2\neq 0$.

(2) $\lambda=3,5$. $\lambda=3$ のとき $\mathbf{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $c_1\neq 0$. $\lambda=5$ のとき $\mathbf{x}_2=c_2\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$, $c_2\neq 0$.

(3) $\lambda=2$. $\lambda=2$ のとき $\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $c\neq 0$.

(4) $\lambda=-1$. $\lambda=-1$ のとき $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, $(c_1,c_2)\neq(0,0)$

問 4. (1) $P=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$　(2) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$　(3) $A^n=\begin{pmatrix}3-2^{n+1} & -3+3\times 2^n\\ 2-2^{n+1} & -2+3\times 2^n\end{pmatrix}$

[0]※この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2018/lae1.html