# 工科の線形代数 1, 期末試験問題

2018/7/16 工学部・機械工学科

注意

- 別紙の解答用紙のみを回収する。
- **問 1.** と**問 3.** は計算過程も記述し、**問 2.** と**問 4.** は解答のみ記述せよ。

**問 1.** 次の行列に対して、逆行列が存在するならば逆行列を求め、存在しないならば**非正則**と記せ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**問 2.** 次の行列式 $|A|$ の値を求めよ。

(1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $|A| = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$　(3) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$

**問 3.** 次の行列 $A$ の固有値 $\lambda$ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ. (どの固有値に対する固有ベクトルかについて明らかにして答えること)

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

**問 4.** 行列 $A$ を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ と定める.

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 2 次正則行列 $P$ を与えよ. ($A$ を対角化せよ.)

(2) (1) の $P$ を用いて, $A$ を対角化した行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) 自然数 $n$ に対し, $A$ の $n$ 乗を求めよ.

[0]※この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2018/lae1.html

**2018 年度春学期・工科の線形代数 1(EM 月 3) 期末試験解答例**

**問 1.** ((1) から (3) は 5 点, (4) が 10 点, 合計 25 点)

(1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (2) 非正則

(3) $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ (4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**問 2.** (各 5 点 $\times 3 = 15$ 点)

(1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$ (2) $|A| = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0$ (3) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -11$

**問 3.** (各 10 点 $\times 4 = 40$ 点)

(1) 固有値 $\lambda = 2$, 固有ベクトル $\mathbf{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c_1 \neq 0$

固有値 $\lambda = 3$, 固有ベクトル $\mathbf{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c_2 \neq 0$

(2) 固有値 $\lambda = 1$, 固有ベクトル $\mathbf{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c_1 \neq 0$

固有値 $\lambda = 5$, 固有ベクトル $\mathbf{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c_2 \neq 0$

(3) 固有値 $\lambda = -3$, 固有ベクトル $\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c \neq 0$

(4) 固有値 $\lambda = 2$, 固有ベクトル

$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$

**問 4.** ($P$：5 点, 対角化：5 点, $n$ 乗：10 点, 合計 20 点)

(1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ など

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ または $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$