

線形代数 1, 期末試験準備問題

2018/7/9 担当: 那須

1 次の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 31 & -37 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 95 & 96 & 97 \\ 96 & 97 & 99 \\ 97 & 98 & 99 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

2 4次行列 $A = (a_{ij})$ の行列式は $|A| = \sum_I \text{sgn}(I) a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4}$ により定義される. ただし

\sum_I は 1 から 4 の順列 $I = (i_1, i_2, i_3, i_4)$ (すなわち集合として $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ が成り立つ) に関する和を表し, $\text{sgn}(I)$ は順列 I の符号を表す.

(1) 順列 I が $I = (4, 3, 1, 2)$ のとき, 順列の符号 $\text{sgn}(I)$ を求めよ.

(2) 順列 I が $I = (3, 4, 1, 2)$ のとき, $A = \begin{pmatrix} a & b & f & 1 \\ c & e & 2 & 7 \\ d & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ に対し, $\text{sgn}(I) a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4}$ を

計算せよ.

3 行列 $A = \begin{pmatrix} a-5 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & a-9 \\ 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないような定数 a の値を全て求めよ.

- 4 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の (i, j) 余因子 Δ_{ij} ($1 \leq i, j \leq 3$) を計算し, それを (i, j) 成分とする行列 $B = (\Delta_{ij})$ を書け.

(2) A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

- 5 次の行列式を因数分解せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & b \\ 3a & 2a+b & a+2b \\ a+2b & 2a+b & 3b \end{vmatrix}$$

- 6 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対し,

$$(1) AB \quad (2) B^3 \quad (3) A^{-1}$$

の行列式の値を求めよ.