期末試験準備問題

$\boxed{1}$ 次の連立合同方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x & \equiv 3 \mod 5 \\ x & \equiv -4 \mod 9 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x & \equiv -6 \mod 8 \\ x & \equiv 3 \mod 13 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x & \equiv 2 \mod 6 \\ x & \equiv 5 \mod 9 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x & \equiv -1 \mod 3 \\ x & \equiv 3 \mod 4 \\ x & \equiv 5 \mod 7 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x & \equiv 3 \mod 4 \\ x & \equiv -2 \mod 5 \\ x & \equiv -5 \mod 9 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x & \equiv 7 \mod 9 \\ x & \equiv 4 \mod 10 \\ x & \equiv 4 \mod 15 \end{cases}$

$\boxed{2}$ 次の拡大体 $K/\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数 ($[K:\mathbb{Q}]$) を求めよ.

(1) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$ (3) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ (4) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2})$

$\boxed{3}$ 次の元 α の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ を求めよ.

(1) $\alpha = -3 + \sqrt{5}$ (2) $\alpha = \dfrac{11 - \sqrt{61}}{6}$ (3) $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt[3]{2}}{2}$ (4) $\alpha = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ 次の多項式 $f(x)$ と $g(x)$ に対し, $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約式 $d(x) = \mathrm{GCD}(f(x), g(x))$ を求めよ. また

$$f(x)a(x) + g(x)b(x) = d(x)$$

を満たす多項式 $a(x), b(x)$ を 1 組与えよ.

(1) $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x^3 - x - 1$

(2) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$, $g(x) = x^4 - 4x^2 + x + 2$

$\boxed{5}$ 次の代数的な元 α に対し, $\mathbb{Q}$ の拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ を考える. 与えられた α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式 ($\in \mathbb{Q}[\alpha]$) の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

(1) $\alpha = \sqrt{3} + 1$, $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 - 3}$ (2) $\alpha = -2 + \sqrt{3}$, $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha + 1}{\alpha^2 + 2}$

(3) $\alpha = \sqrt[3]{3}$, $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 + \alpha}$

$\boxed{6}$ 次の命題を証明せよ (オマケ).

(1) $f : G \longrightarrow G'$ を群の準同型写像とする. H が G' の部分群ならば, H の f による逆像 $f^{-1}(H) = \{a \in G \mid f(a) \in H\}$ は G の部分群である.

(2) $a \equiv b \mod 2$ のとき, 連立合同方程式 $\begin{cases} x & \equiv a \mod 4 \\ x & \equiv b \mod 6 \end{cases}$ は, 12 を法として (つまり $\mod 12$ で) 唯一の整数解を持つ.

(3) $\mathbb{Q}$ を有理数体とし, α を $\mathbb{Q}$ 上代数的な元とする. α の $\mathbb{Q}$-係数の有理式 $f(\alpha)/g(\alpha)$ (ただし $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $g(\alpha) \neq 0$) に対し, $\mathbb{Q}$-係数の多項式 $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在し, $f(\alpha)/g(\alpha) = h(\alpha)$ が成り立つ.

[0] ※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2018/fg.html

略解：

$\boxed{1}$ (1) $x \equiv 23 \mod 45$

(2) $x \equiv 42 \mod 104$

(3) $x \equiv 14 \mod 18$

(4) $x \equiv 47 \mod 84$

(5) $x \equiv 103 \mod 180$

(6) $x \equiv 34 \mod 90$

$\boxed{2}$ (1) 2 (2) 4 (3) 6 (4) 12

$\boxed{3}$ (1) $f_\alpha(x) = x^2+6x+4$ (2) $f_\alpha(x) = \frac{1}{3}(3x^2-11x+5)$ (3) $f_\alpha(x) = \frac{1}{8}(8x^3+12x^2+6x-1)$
(4) $f_\alpha(x) = x^4 - 60x^2 + 36$

$\boxed{4}$ (1) $d(x) = 1,\ a(x) = \frac{1}{7}(-4x^2 + x + 2),\ b(x) = \frac{1}{7}(4x - 9)$

(2) $d(x) = x + 2,\ a(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + x + 2),\ b(x) = \frac{x}{2}$

$\boxed{5}$ (1) $\frac{2\alpha - 3}{11}$ (2) $\frac{\alpha + 7}{11}$ (3) $\frac{\alpha^2 + 3\alpha - 3}{12}$

$\boxed{6}$ レポート問題の解答, また配布の講義ノートを参照せよ.