期末試験問題

- 問題文を良く読み, 解答を別紙「解答用紙」に記入しなさい.
- 答えには下線をひく などし, わかりやすくすること.

$\boxed{1}$ 次の連立合同方程式を解け. ただし答えは $x \equiv a \mod n$ の形に表すこと.

(1) $\begin{cases} x & \equiv 5 \mod 7 \\ x & \equiv 8 \mod 23 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x & \equiv 2 \mod 3 \\ x & \equiv -3 \mod 7 \\ x & \equiv 6 \mod 10 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x & \equiv 3 \mod 8 \\ x & \equiv 9 \mod 10 \\ x & \equiv 5 \mod 14 \end{cases}$

$\boxed{2}$ 次の拡大体 $K/\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数 ($[K:\mathbb{Q}]$) を求めよ.

(1) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$　　(2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$　　(3) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2})$

$\boxed{3}$ 次の元 α の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ を求めよ.

(1) $\alpha = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}$　　(2) $\alpha = \sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ 多項式 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ と $g(x) = x^2 - 1$ に対し, $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約式 $d(x) = \mathrm{GCD}(f(x), g(x))$ を求めよ. また

$$f(x)a(x) + g(x)b(x) = d(x)$$

を満たす多項式 $a(x), b(x)$ を 1 組与えよ.

$\boxed{5}$ 次の代数的な元 α に対し, $\mathbb{Q}$ の拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ を考える. 与えられた α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式 ($\in \mathbb{Q}[\alpha]$) の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

(1) $\alpha = 1 - \sqrt{2},\quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 + \alpha + 1}$　　(2) $\alpha = \sqrt[3]{2},\quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 - \alpha}$

$\boxed{6}$ 次の命題を一つ選び, 証明せよ.

(1) $f: G \longrightarrow G'$ を群の準同型写像とする. H が G' の部分群ならば, H の f による逆像 $f^{-1}(H) = \{a \in G \mid f(a) \in H\}$ は G の部分群である.

(2) $a \equiv b \mod 2$ のとき, 連立合同方程式 $\begin{cases} x & \equiv a \mod 4 \\ x & \equiv b \mod 6 \end{cases}$ は, 12 を法として (つまり $\mod 12$ で) 唯一の整数解を持つ.

(3) $\mathbb{Q}$ を有理数体とし, α を $\mathbb{Q}$ 上代数的な元とする. α の $\mathbb{Q}$-係数の有理式 $f(\alpha)/g(\alpha)$ (ただし $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $g(\alpha) \neq 0$) に対し, $\mathbb{Q}$-係数の多項式 $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在し, $f(\alpha)/g(\alpha) = h(\alpha)$ が成り立つ.

[0]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2018/fg.html

略解：

$\boxed{1}$ (1) $x \equiv 54 \mod 161$ (2) $x \equiv 116 \mod 210$ (3) $x \equiv 19 \mod 280$

$\boxed{2}$ (1) 5 (2) 4 (3) 6

$\boxed{3}$ (1) $f_\alpha(x) = x^2 + 5x + 3$ (2) $f_\alpha(x) = x^4 - 26x^2 + 9$

$\boxed{4}$ $d(x) = 1, \quad a(x) = x, \quad b(x) = -x^2 + 2x - 1$

$\boxed{5}$ (1) $\dfrac{-3\alpha + 8}{7}$ (2) $\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha + 2}{2}$

$\boxed{6}$ 略