

中間レポート問題

- 裏面の注意を良く読んだ上で, 以下の問題の解答をレポート用紙 (A4 サイズ・ホッチキスなどで閉じる) にまとめ, **2018年6月28日(木)16:00**までに理学部事務室横のレポートボックスに提出しなさい.

- 4(2)(b)の問題を(一部)訂正しました. (2018.6.21)

1 (1) 次の連立合同方程式を解け.

$$(a) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 8 \pmod{17} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv -3 \pmod{11} \\ x \equiv 5 \pmod{14} \end{cases}$$

(2) 整数 a, b に対し, 連立合同方程式

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{4} \\ x \equiv b \pmod{10} \end{cases} \quad (\heartsuit)$$

を考える.

- (c) (\heartsuit) の解が存在する為の必要十分条件を a, b を用いて表せ. (単に条件を求めるだけでなく, 求めた条件が (\heartsuit) の解が存在するために必要かつ十分であることも示すこと.)
- (d) 前問で求めた条件のもとで, (\heartsuit) の全ての解を求めよ.

2 $f: G \rightarrow G'$ を群の準同型写像とし, G' の部分群 H に対し,

$$f^{-1}(H) = \{a \in G \mid f(a) \in H\}$$

を H の f による逆像とする.

- (1) $f^{-1}(H)$ が G の部分群になることを示せ.
- (2) H が G' の正規部分群ならば, $f^{-1}(H)$ が G の正規部分群になることを示せ.

3 2元体 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ の元を成分とする 2次正則行列全体

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad ad - bc \equiv 1 \pmod{2} \right\}$$

は, 演算

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 \pmod{2} & a_1 b_2 + b_1 d_2 \pmod{2} \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 \pmod{2} & c_1 b_2 + d_1 d_2 \pmod{2} \end{pmatrix}$$

に関して群 (乗法群) になる.

- (1) G の元を全て求めよ.
- (2) G の群表を計算せよ. (G の元に適当に名前を付けて答えよ.)
- (3) G の各元の位数を求め, G と同型な群の例を 1つ挙げよ.
- (4) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, M で生成される G の部分群 $\{M^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を H とする. 商群 G/H が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型であることを示せ.

問題は裏面にもあります.

- 4 (1) $\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}[\omega]$ を示せ. ただし, ω は 1 の原始 3 乗根, すなわち $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ とする.
- (2) 有理数体 \mathbb{Q} の代数拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ において, 次の α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.
- (a) $\alpha = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$, $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{\alpha - 3}$
- (b) $\alpha = \sqrt[3]{3}$ (訂正します!), $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 + 1}$

—— 注意点 (良く読んで解答すること) ——

- 他人のレポートを明らかに写したと判断される場合には, 写したものの写させたものを問わず, 評価を 0 点 とする.
- 問題を他の受講者と共同で考え, 解答を作成する場合には, 必ず解答を理解した上で, 自身自身で答案を作成すること. 後日答案内容に関する問合せをする可能性もある.
- 図書・文献・Webなどを参照し解答する場合には, 参照した図書やページを明らかにすること.
- 締切は厳守すること. 締切を過ぎて提出されたレポートはいかなる理由があっても受け取りません.

⁰※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2018/fg.html>