線形代数SP, 期末テスト準備問題1

2018/1/11 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 7 & -13 \\ 17 & -23 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 97 & 98 & 99 \\ 95 & 96 & 97 \\ 98 & 99 & 99 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (7) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}\right|$

$\boxed{2}$ 次の行列 A の逆行列を求めよ. また A の逆行列が存在しない場合には, 理由とともに「逆行列は存在しない」と答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ 次のベクトルの組の1次独立性を判定せよ.

(1) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ (2) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

(3) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ (4) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\boxed{4}$ 次の行列を対角化せよ. なお答えは, 「$P = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること.

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -15 & -7 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -15 & -7 \end{pmatrix}$ に対し, A^n と B^n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ を求めよ.

$\boxed{6}$ 次の行列の中で対角化が<u>可能でないもの</u>を<u>全て</u>選べ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[0] 講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/lasp.html

解答 (略解)

$\boxed{1}$ (1)　-21　　(2)　60　　(3)　-32　　(4)　-2　　(5)　17　　(6)　8　　(7)　0

$\boxed{2}$ (1)　$A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$　　(2)　$A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & -5 & -3 \end{pmatrix}$　　(3)　A の行列式 $|A|$ の値が 0 に等しいので, A^{-1} は存在しない.

$\boxed{3}$ (1)　1 次独立　　(2)　1 次従属　　(3)　1 次独立　　(4)　1 次従属

$\boxed{4}$ (1)　$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

(2)　$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる.

(3)　$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

(4)　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

(5)　$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

$\boxed{5}$ $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3^{n+1} & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} & -3 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$　　$B^n = \begin{pmatrix} -5(-2)^n + 6(-1)^n & (-2)^{n+1} + 2(-1)^n \\ 15(-2)^n - 15(-1)^n & -5(-1)^n + 3(-1)^n 2^{n+1} \end{pmatrix}$

$\boxed{6}$ (1) (3) (6) (8)