線形代数 (SP), 期末テスト準備問題２略解

2018/1/15 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 31 & -37 \end{vmatrix} \overset{②-4\times①}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7\times(-1)-(-9)\times 3 = 20$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{①-3\times③}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -7 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{2}\text{で展開}}{=\!=\!=} (-1)\times\left(-\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}\right)$
$= -7\times 5-(-2)^2 = -39$

(3) $\begin{vmatrix} 95 & 96 & 97 \\ 96 & 97 & 99 \\ 97 & 98 & 99 \end{vmatrix} \overset{③-①}{\underset{②-①}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 95 & 96 & 97 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{3}-\boxed{1}}{\underset{\boxed{2}-\boxed{1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 95 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
$\overset{\boxed{2}\text{で展開}}{=\!=\!=} -1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\times(-2) = 2$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{③-①}{\underset{④-2\times①}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{\boxed{2}\text{で展開}}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$
$\overset{①-②}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6\times 1\times 3 = -18$

$\boxed{2}$ 次のベクトルの各組の１次独立性について判定せよ. (答えのみで良い.)

(1) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ (2) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$ (3) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

である. 正方行列の列ベクトルの１次独立性と行列式の値の間の関係

$$A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \text{ のとき, } \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \text{ が１次独立} \Longleftrightarrow |A| \neq 0$$

により, 解答は以下のようになる.

解答) (1) １次独立 (2) １次従属 (3) １次独立

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 次の設問に答えよ.

(1) A の (i,j) 余因子 Δ_{ij} $(1 \leq i, j \leq 3)$ を全て求めよ.

$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6$ $\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10$ $\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ $\Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ $\Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$

(2) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{①-2\times③}{\underset{②-2\times③}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}\text{で展開}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$
$= (-6)(-2)-(-5)(-1) = 7$

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
余因子行列を用いた逆行列の公式により,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}{}^t(\Delta_{ij}) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 10 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ 次の行列 A を対角化せよ．なお答えは，「$P = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$　A の固有方程式は $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$. 従って A の固有値は $\lambda = -1, 4$ である．

次に A の固有ベクトルを求める．$\lambda = -1$ のとき, $A + E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(A+E)\mathbf{x} = 0$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$　$(t_1 \neq 0)$.

$\lambda = 4$ のとき, $A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(A-4E)\mathbf{x} = 0$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$(t_2 \neq 0)$. よって, $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる．

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$　A の固有方程式は

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -8 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda^3 = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1) = 0.$$

従って A の固有値は $\lambda = 0, \pm 1$ である．

次に A の固有ベクトルを求める．$\lambda = 0$ のとき, $A \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A\mathbf{x} = 0$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$(t_1 \neq 0)$.

$\lambda = 1$ のとき, $A - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(A-E)\mathbf{x} = 0$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$(t_2 \neq 0)$.

$\lambda = -1$ のとき, $A + E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(A+E)\mathbf{x} = 0$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_3 = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　$(t_3 \neq 0)$.

よって, $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．

$\boxed{5}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a-5 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & a-9 \\ 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないような定数 a の値を **全て** 求めよ．

A の行列式 $|A|$ の値は, 3 行目で展開すれば,

$$|A| = (a-2)\left(-\begin{vmatrix} a-5 & 1 \\ -3 & a-9 \end{vmatrix}\right) = -(a-2)\left\{a^2 - 14a + 48\right\} = -(a-2)(a-6)(a-8)$$

となる．A が逆行列を持たない為の必要十分条件は $|A| = 0$ であるので, 求める定数 a の値は

$$a = 2, 6, 8$$

となる．

$\boxed{6}$ n を自然数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対し, A のべき乗 A^n を求めよ．

A の固有方程式

$$|A - \lambda E| = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

を解いて, A の固有値 λ を求めると, $\lambda = 2, 3$. 従って, $\boxed{4}$ と同様の方法で, A を対角化すると, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．P の逆行列は

$$P^{-1} = \frac{1}{2 \times 1 - 1^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

従って,

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[0]講義に関する情報は次のサイトを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/lasp.html