線形代数 (SP) 中間試験準備問題解答

担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A^4 および $A^3 - 2A^2 + 5A - E$ を計算せよ.

Hamilton-Cayley の定理より,

$$A^2 - (1+1)A + (1^2 - 2\cdot(-1))E = A^2 - 2A + 3E = O.$$

従って, $A^2 = 2A - 3E$ を得る.

$$A^4 = (2A-3E)^2 = 4A^2 - 12A + 9E = 4(2A-3E) - 12A + 9E = -4A - 3E = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

一方,

$$A^3 - 2A^2 + 5A - E = (A^2 - 2A + 3E)A + 2A - E = OA + 2A - E = 2A - E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

答え：$A^4 = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ 　　$A^3 - 2A^2 + 5A - E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ 次の連立1次方程式を掃き出し法を用いて解け. ただし方程式の解が無い場合には, 「解無し」と答えよ.

(1)

$$\left(\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 5 & 6 \\ -3 & -8 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{②+3\times①} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 49 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times 1/7} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①-5\times②} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -29 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

よって $x = -29, y = 7$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 3 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & -6 & -9 \\ 4 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & -9 \\ 2 & 3 & 4 & 16 \\ 4 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[③-4\times①]{②-2\times①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 1 & 16 & 34 \\ 0 & -6 & 21 & 30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[③+6\times②]{①-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -22 & -43 \\ 0 & 1 & 16 & 34 \\ 0 & 0 & 117 & 234 \end{array}\right) \xrightarrow{③\times 1/117} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -22 & -43 \\ 0 & 1 & 16 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②-16\times③]{①+22\times③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

よって $x = 1, y = 2, z = 2$

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & -9 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③+3\times①]{②-2\times①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times 1/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[③+②]{①+2\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって $z = t$ とおけば, $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$ 　(t は任意)

$\boxed{4}$ 次の行列を行基本変形を用いて階段行列まで変形し, 階数を求めよ.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-2\times①]{②+①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+2\times②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

従って $\operatorname{rank} A = 3$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{③-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+3\times②} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って $\operatorname{rank} B = 2$

$\boxed{5}$ 次の連立方程式が解を持つように定数 a と b の値を定め, 連立方程式を解け.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & -5 & -9 & 1 \\ -5 & 6 & 8 & a \\ -7 & 9 & 13 & b \end{array}\right) \xrightarrow[④+7\times①]{②-3\times①,③+5\times①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & a \\ 0 & -5 & -15 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[④+5\times②]{①+2\times②,③+4\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+4 \\ 0 & 0 & 0 & b+5 \end{array}\right)$$

従って方程式の解が存在する為には, $a = -4$ かつ $b = -5$ が必要十分である. $z = t$ とおけば,

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 3t \qquad (t \text{ は任意}) \\ z = t \end{cases}$$

$\boxed{6}$ 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\times5} \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 20 & -45 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-4\times①} \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①-11\times②} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[②\times(-1)]{①\times(1/5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $\operatorname{rank} A = 2$ より, A^{-1} は存在する. 2 次単位行列 E_2 に上と同じ基本変形を施すと

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\times5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-4\times①} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①-11\times②} \begin{pmatrix} 45 & -55 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[②\times(-1)]{①\times(1/5)} \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

従って求める逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

---

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②-③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $\operatorname{rank} A = 3$ より, A^{-1} は存在する. 3 次単位行列 E_3 に上と同じ基本変形を施すと

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+①} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②-③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

従って求める逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

---

[0]**(1) の別解)** 2 次の逆行列の公式: $ad - bc \neq 0$ のとき $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を用いて,

$$A^{-1} = \frac{1}{5\times(-9)-(-11)\times4}\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

と求めても良い.

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/lasp.html