線形代数 (SP), 第 16 回演習問題

2017/12/11 担当：那須

$\boxed{1}$ $f: V \to W$ をベクトル空間 V からベクトル空間 W への写像とする. f が線形写像であることの定義を書け.

$\boxed{2}$ 線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を,

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

により定める. 次のベクトル $\mathbf{x}$ に対し, 像 $f(\mathbf{x})$ を求めよ.

(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ $m \times n$ 行列 A に対し, $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ により定める. f が線形写像であることを示せ.

$\boxed{4}$ 次の写像 f が線形写像かどうかについて答えよ.

(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (3x, 4y)$

(2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (2x + 3y, -x + 4y, 5x - 2y)$

(3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 1, y - 1)$

(4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f$ は原点 $\mathbf{0}$ の周りの角度 θ の回転

---

[0]略解：

$\boxed{1}$ 線形写像 f は次の 2 条件を満たす.

(1) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V$ に対し, $f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}')$ が成り立つ.

(2) 任意の $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in V$ に対し, $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ が成り立つ.

$\boxed{2}$ (1) $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \end{pmatrix}$ (2) $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ 教科書 p.87, 例 1

$\boxed{4}$ (1) 線形写像 (2) 線形写像 (3) 線形写像でない (4) 線形写像

解説) (1),(2),(4) については, f は適当な行列 A とベクトル $\mathbf{x}$ を用いて, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と表される. 一方, (3) については, $f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ となり, 零ベクトルの像が零ベクトルにならないため, f は線形写像でない.

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/lasp.html