線形代数 (SP), 第 15 回演習問題

2017/12/7 担当：那須

$\boxed{1}$ 次のベクトルの組が, 括弧内のベクトル空間の基底になるかどうか答えよ.

(1) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ 　　(ベクトル空間は $\mathbb{R}^2$)

(2) $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 　　(ベクトル空間は $\mathbb{R}^3$)

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に対し, 線形関係式 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が成り立つとき, 係数 c_1, c_2, c_3 の値を求めよ.

$\boxed{3}$ 連立方程式の解空間

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

の次元と 1 組の基底を求めよ. (ヒント：教科書 p.83, 例題 4.4.1)

[0] 略解：

$\boxed{1}$ (1) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+\frac{2}{3}\times①} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\operatorname{rank} A = 1 < 2$ より, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底にならない.

(2) $B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{rank} B = 3$ より, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底になる.

$\boxed{2}$ c_1, c_2, c_3 の満たす連立方程式を解くと,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{③+①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{③-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[②-③]{①-③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

よって, $c_1 = -2, c_2 = -1, c_3 = 4$.

$\boxed{3}$ 連立方程式の係数行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+①]{②-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{①+②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と簡約化され, 一般の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-2t \\ -2s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は任意の実数})$$

で与えられる. ここで, $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は W を生成し, 明らかに 1 次独立である. よって $\dim W = 2$ で $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ が W の 1 組の基底となる.

[0] ※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/lasp.html