線形代数 (SP), 第 14 回演習問題

2017/12/4 担当：那須

$\boxed{1}$ 次のベクトルの組が 1 次独立かどうか判定せよ. (ヒント：教科書 p.69, 例題 4.2.1)

(1) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$

(4) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(5) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

[0]略解：

$\boxed{1}$ (1) $A := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③-①} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{③-②} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

従って, $\operatorname{rank} A = 3$. 連立方程式 $A\mathbf{x} = 0$ は自明な解 $\mathbf{x} = 0$ しか持たないので, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次独立である.

(2) $B := \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-3\times①} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\times 1/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って, $\operatorname{rank} B = 2 < 3$. 連立方程式 $B\mathbf{x} = 0$ は非自明な解 $\mathbf{x} \neq 0$ を持つので, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ は一次従属である.

(3) $C := \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 7 & -1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ とおけば, 明らかに $\operatorname{rank} C \leq 3 < 4$. 従って, 連立方程式 $C\mathbf{x} = 0$ は非自明な解 $\mathbf{x} \neq 0$ を持つので, $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$ は一次従属である.

(4) 一次独立

(5) 一次従属

ポイント！

ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ が一次独立であるための必要十分条件は,

$$\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \ \ldots, \ \mathbf{a}_n) = n.$$

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/lasp.html