工科の線形代数 1(EI), 演習問題

2017/7/3 担当：那須

例題 1. (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ.

(2) A を対角化する正則行列 P と対角化 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) 自然数 n に対し, A の n 乗 A^n を求めよ. [1]

解答

(1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (-1)^2 = \lambda(\lambda - 2)$. 従って A の固有値は $\lambda = 0, 2$.

- $\lambda = 0$ のとき, $A - 0E = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  $A\mathbf{x} = 0$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$.

- $\lambda = 2$ のとき, $A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  $(A - 2E)\mathbf{x} = 0$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$.

(2) $P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

(「$P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.」なども正解.)

(3) P の逆行列 P^{-1} は $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. よって,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 0^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[a]

[a] $P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ による対角化を用いても, A^n の計算結果は同じになる.

$\boxed{1}$ 次の行列 A を対角化する正則行列 P と対角化 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ n を自然数とする. 次の行列 A のべき乗 A^n を計算せよ. ただし, (2),(3) については, 問題 $\boxed{1}$ で求めた行列の対角化を利用して計算しても良い.

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

[1] ヒント：$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のとき, $A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1}$

[1] 解答：$\boxed{1}$ (1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ (1) $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (2) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ -1+2^n & 1 \end{pmatrix}$ (3) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$

[1] ※この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/lae1.html