

- 解答が講義ホームページに掲載してあります(脚注参照). 各自で答え合わせをしてください.

1 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 11 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & -2 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ により定義される線形写像 $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ に対し,

- (a) f の核 $\ker f$ の次元と 1 組の基底, (b) f の像 $\text{im } f$ の次元と 1 組の基底,

を求めよ. ただし, $\text{im } f$ の基底は A の列ベクトルから選ぶものとする. A の 1 列目から順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$ とし, 基底は列ベクトルの部分集合 $\{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ ($i_1 < \dots < i_r$) として表すこと.

2 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ を全て求めよ.

- (2) A の固有ベクトル \mathbf{x} を全て求めよ.

3 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を全て求めよ.
 (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則な正方行列 P を 1 つ与えよ. (A を対角化せよ.)
 (3) 自然数 n に対し, A のべき A^n を求めよ.

4 次の行列の中で対角化が 可能でないもの を 全て 選べ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
 (6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5 2 次以下の実係数多項式のなすベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_2$ とする. $\mathbb{R}[x]_2$ 上の次の線形変換 T に対し,

- (a) 基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列 A , (b) T の固有値 λ と固有ベクトル $f(x)$

を求めよ. (教科書 p.103, 例題 5.3.2 参照)

- (1) $T: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$, $T(f(x)) = f(1 - 3x)$
 (2) $T: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$, $T(f(x)) = f(3x) + f'(x)$