線形代数 2, 期末テスト準備問題 3

2018/1/15 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列を対角化せよ. なお答えは,「$P = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること.

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -15 & -7 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -15 & -7 \end{pmatrix}$ に対し, A^n と B^n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ を求めよ.

$\boxed{3}$ 次の行列の中で対角化が <u>可能でないもの</u> を <u>全て</u> 選べ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html

[0]**解答 (略解)**

$\boxed{1}$ (1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

(2) $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる.

(3) $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

(4) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

(5) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

$\boxed{2}$ $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3^{n+1} & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} & -3 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$ $B^n = \begin{pmatrix} -5(-2)^n + 6(-1)^n & (-2)^{n+1} + 2(-1)^n \\ 15(-2)^n - 15(-1)^n & -5(-1)^n + 3(-1)^n 2^{n+1} \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ (1) (3) (6) (8)