中間テスト準備問題 (その２)

$\boxed{1}$ (1) 複素平面 $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ $(i = \sqrt{-1})$ が $\mathbb{R}$ 上の 2 次元ベクトル空間になることを示せ.

(2) 実数を係数とする n 次以下の多項式全体

$$\mathbb{R}[x]_n = \{c_0 + c_1 x + \dots c_n x^n \mid c_i \in \mathbb{R} \quad {}^{\forall} i = 0, 1, \dots, n\}$$

が $\mathbb{R}$ 上の $(n+1)$ 次元ベクトル空間になることを示せ.

(3) V をベクトル空間とし, W_1, W_2 を V の部分空間とする.

(a) $W_1 \cap W_2$ が V の部分空間であることを示せ. (教科書 p.67, 問題 4.1-4)

(b) $W_1 \cup W_2$ が V の部分空間にならないような例を挙げよ. (ヒント：教科書 p.67, 問題 4.1-5)

$\boxed{2}$ V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする.

(1) V の n 本のベクトル $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ が 1 次独立であることの定義を述べよ. (教科書 p.68)

(2) V の n 本のベクトル $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ が, n 本のベクトル $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ の 1 次結合として

$$(\mathbf{y}_1 \ \dots \ \mathbf{y}_n) = (\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n)A, \qquad (A \text{ は } \mathbb{R} \text{ 成分の } n \text{ 次正方行列})$$

と表されている.

(a) $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ が 1 次独立であり, かつ $\operatorname{rank} A = n$ のとき, $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ が 1 次独立であることを示せ.

(b) $\operatorname{rank} A < n$ のとき, $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ が 1 次従属であることを示せ.

(ヒント：教科書 p.73 例題 4.2.2, 第 6 回小テスト, 教科書 p.78 定理 4.3.6)

$\boxed{3}$ (1) V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする.

(a) V の n 本のベクトルからなる集合 $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset V$ が V の基底であることの定義を述べよ. (教科書 p.81)

(b) V の基底に含まれるベクトルの本数が, 基底の取り方によらず, 一定であることを示せ. (ヒント：教科書 p.81 定理 4.4.1, 講義ノート)

(2) $\mathbb{R}[x]_2$ を実数を係数とする 2 次以下の多項式全体のなすベクトル空間とする. 以下の問いに答えよ. ただし $1, x, x^2$ が $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であることは証明せずに使って良い.

(a) $f_1 = 1 - 2x + x^2, f_2 = x + x^2, f_3 = -2 + 3x - 2x^2$ とする. $\{f_1, f_2, f_3\}$ が $\mathbb{R}[x]_2$ の基底になることを示せ. (ヒント：$\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3$ より, f_1, f_2, f_3 が 1 次独立であることを示せば良い.)

(b) 次を満たす実数 a, b, c の値を求めよ.

$$1 + 2x + 3x^2 = af_1 + bf_2 + cf_3$$

[0] ※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html