線形代数２，期末試験問題＆解答用紙

2018/1/18 担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | 氏名 | 点数

- 問題用紙は 1 枚, 裏表合わせて全部で 5 問ある. **解答は問題用紙の余白に書くこと**.
- 答えには下線を引くなどし, わかりやすくすること. 途中の式や論理を欠いた解答, 字の粗末な解答, 答えがどれか判別つかない解答は, 減点の対象になる場合がある.

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ により定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ に対し,

(a) f の核 $\ker f$ の次元と 1 組の基底,　　(b) f の像 $\operatorname{im} f$ の次元と 1 組の基底,

を求めよ. ただし, $\operatorname{im} f$ の基底は A の列ベクトルから選ぶものとする. A の 1 列目から順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ とし, 基底は列ベクトルの部分集合 $\{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ $(i_1 < \cdots < i_r)$ として表すこと.

$\boxed{2}$ (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ を全て求めよ.

(2) A の固有ベクトル $\mathbf{x}$ を全て求めよ. (どの固有値に対する固有ベクトルかを明らかにすること.)

$\boxed{3}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を全て求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則な正方行列 P を 1 つ与えよ. なお答えは,「$P = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること. (括弧の中には行列が入る.)

(3) 自然数 n に対し, A のべき A^n を求めよ.

$\boxed{4}$ (1) n 次正方行列 A の固有多項式が

$$|tE - A| = (t - a_1)^{m_1} \dots (t - a_k)^{m_k}, \qquad (\text{ただし } i \neq j \text{ のとき } a_i \neq a_j)$$

のように 1 次式の積に分解するとき, A が対角化可能であるための必要十分条件を書け.

(2) 次の行列の中で対角化が <u>可能でないもの</u> を <u>全て</u> 選び, 空欄の中に番号を記入せよ. なお, 解答は答え (番号) のみで良い.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} -7 & -10 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

答 $\boxed{}$

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関して, 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ の表現行列を求めよ.

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/la2.html