線形代数２, 期末テスト準備問題２略解

2018/1/15 担当：那須

- 詳細な解答 (解答の書き方) については, これまでの小テストを参考にしてください.

$\boxed{1}$ 行列 A は

$$A \xrightarrow[\text{④}-2\times\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①},\text{③}+\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{④}-3\times\text{②}]{\text{①}+\text{②},\text{③}-\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

と簡約化される. 従って連立方程式 $A\mathbf{x} = 0$ の解は,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s-3t-5u \\ s \\ -2t+u \\ t \\ u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s,t,u\text{ は任意})$$

で与えられる. よって $\ker f$ の次元は 3 に等しく, $\ker f$ の基底として $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ が取れる. また簡約化された階段行列により, $\mathrm{im}\, f$ の次元は $\mathrm{rank}\, A = 2$ に等しく, 基底として A の $1, 3$ 列目が取れ, 基底は $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ となる.

$\boxed{2}$ (1) $\lambda = -1, 1, 0$ (2) $\lambda = -1$ のとき, $\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \neq 0)$. $\lambda = 1$ のとき, $\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \neq 0)$. $\lambda = 0$ のとき, $\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \neq 0)$.

$\boxed{3}$ (1) $\lambda = 2, 1$ (2) $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる.

(3) $A^n = \begin{pmatrix} -2+3\cdot 2^n & 3-3\cdot 2^n \\ -2+2^{n+1} & 3-2^{n+1} \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ (1) (3) (6) (8)

$\boxed{5}$ (1) (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ (b) T の固有値は $\lambda = 1, -3, 9$. T の固有ベクトルは $\lambda = 1$ のとき, $f(x) = t$, $(t \neq 0)$, $\lambda = -3$ のとき, $f(x) = t(-1+4x)$, $(t \neq 0)$, $\lambda = 9$ のとき, $f(x) = t((-1+4x)^2)$, $(t \neq 0)$.

(2) (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ (b) T の固有値は $\lambda = 1, 3, 9$. T の固有ベクトルは $\lambda = 1$ のとき, $f(x) = t$, $(t \neq 0)$, $\lambda = -3$ のとき, $f(x) = t(1+2x)$, $(t \neq 0)$, $\lambda = 9$ のとき, $f(x) = t(1+8x+24x^2)$, $(t \neq 0)$.

[0] 講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html