

- 詳細な解答 (解答の書き方) については, これまでの小テストを参考にしてください.

1 行列 A は

$$\begin{aligned}
 A &\xrightarrow[\textcircled{4}-3\times\textcircled{1}]{\textcircled{2}+2\times\textcircled{1}, \textcircled{3}-2\times\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{4}+\textcircled{2}]{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\textcircled{3}\leftrightarrow\textcircled{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{4}-4\times\textcircled{3}]{\textcircled{1}+\textcircled{3}, \textcircled{2}+3\times\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B
 \end{aligned}$$

と簡約化される. 従って連立方程式 $A\mathbf{x} = 0$ の解は,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s - 2t \\ -3s - t \\ s \\ t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は任意})$$

で与えられる. よって $\ker f$ の次元は 2 に等しく, $\ker f$ の基底として $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が取

れる.

また簡約化された階段行列により, $\text{im } f$ の次元は $\text{rank } A = 3$ に等しく, 基底として A の 1, 2, 4 列目が取れ, 基底は $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ となる.

2 (1) $\lambda = 2, 1, 0$ (2) $\lambda = 2$ のとき, $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ($t \neq 0$). $\lambda = 1$ のとき, $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ($t \neq 0$). $\lambda = 0$ のとき, $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ($t \neq 0$).

3 (1) $\lambda = 3, 2$ (2) $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

(3) $A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$

4 (1) $n - \text{rank}(A - a_i E) = m_i$ が任意の $i = 1, \dots, k$ に対し成立する. (2) 答え: (1) (4) (7)

5 $\begin{pmatrix} -8 & 4 & 3 \\ 14 & -7 & -5 \end{pmatrix}$