

1 (1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 7 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ (4) 2

2 (1) $x = -1, y = 1, z = -1, w = -2$
 (2) $x = \frac{1}{2}(t+1), y = -1-t, z = \frac{1}{2}(t+1), w = t$ (t は任意)

3 (1) $a = -5, x = \frac{1}{5}(-17t-7), y = \frac{1}{5}(t+11), z = t$ (t は任意)
 (2) $a = 3, x = -1, y = 5, z = 7$

4 (1) 3 (2) 20 (3) $(x-y)(y-z)(z-x)$ (4) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

5 (1) (a) $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $|A| = 3, A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
 (2) (a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 9 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $|A| = 7, A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 9 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

- 6 (1) (i) W が零ベクトル $\mathbf{0}$ を含む.
 (ii) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ ならば, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$.
 (iii) $\mathbf{x} \in W, c \in \mathbb{R}$ ならば, $c\mathbf{x} \in W$.
 (2) (a) 部分空間 (b) 部分空間でない (c) 部分空間
 (d) 部分空間 (e) 部分空間でない (f) 部分空間

- 7 (1) 一次独立 (2) 一次従属 (3) 一次独立 (4) 一次独立 (5) 一次従属

8 解答) $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4 \ \mathbf{a}_5)$ とおけば, A は基本変形により

$$A \xrightarrow{\substack{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}, \textcircled{3}+3\times\textcircled{1} \\ \textcircled{4}+2\times\textcircled{1}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -10 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 17 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}+\textcircled{2}, \textcircled{3}+\textcircled{2} \\ \textcircled{4}+2\times\textcircled{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-\textcircled{3}, \textcircled{2}-2\times\textcircled{3} \\ \textcircled{4}+2\times\textcircled{3}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

と簡約化される. 最後の行列を $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4 \ \mathbf{b}_5)$ とおくと, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ に対し,

$$A\mathbf{x} = 0 \iff B\mathbf{x} = 0$$

が成り立ち, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5$ の間の1次関係と $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5$ の間の1次関係は等しい. $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4$ は1次独立であり, $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_5$ は,

$$\mathbf{b}_3 = -3\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{b}_5 = -2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_4$$

と表せる. よって,

- (1) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5$ の 1 次独立な最大個数は 3 である.
 (2) 3 個の 1 次独立なベクトルは前から順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ となる.
 (3) \mathbf{a}_3 と \mathbf{a}_5 は $\mathbf{a}_3 = -3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5 = -2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$ と表される.

9 解答) 係数行列を A とおけば, 基本変形により

$$A \begin{array}{l} \xrightarrow{\substack{\textcircled{2}+\textcircled{1} \\ \textcircled{3}+2\times\textcircled{1}}} \\ \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}+\textcircled{2} \\ \textcircled{3}+2\times\textcircled{2}}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 8 \\ -2 & -4 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\substack{\textcircled{2}+\textcircled{1} \\ \textcircled{3}+2\times\textcircled{1}}} \\ \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-3\times\textcircled{3} \\ \textcircled{2}-4\times\textcircled{3}}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-3\times\textcircled{3} \\ \textcircled{2}-4\times\textcircled{3}}} \\ \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-3\times\textcircled{3} \\ \textcircled{2}-4\times\textcircled{3}}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-3\times\textcircled{3} \\ \textcircled{2}-4\times\textcircled{3}}} \\ \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-3\times\textcircled{3} \\ \textcircled{2}-4\times\textcircled{3}}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と簡約される. 従って, 方程式の一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s + t \\ s \\ -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は任意の実数})$$

で与えられる. ここで, $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は W を生成し, 明らかに 1

次独立である. よって $\dim W = 2$ で $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ が W の 1 組の基底となる.