線形代数 2, 中間試験問題＆解答用紙

2017/11/9 担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | |　氏名 ＿＿＿＿　点数 ＿＿

- 問題用紙は 1 枚, 裏表合わせて全部で 4 問ある. **解答は問題用紙の余白に書くこと**.
- 答えには下線を引くなどし, わかりやすくすること. 途中の式や論理を欠いた解答, 字の粗末な解答, 答えがどれか判別つかない解答は, 減点の対象になる場合がある.

$\boxed{1}$ (1) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$ を計算せよ.

(2) 連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解け.

(3) 次の行列式を計算せよ: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を計算せよ.

$\boxed{2}$ (1) k を実数とする. xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の直線 $y = kx$ がベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の部分空間であることを示せ.

(2) 次の各ベクトルの組が 1 次独立かどうか調べ, 1 次独立なら「独立」を, そうでないなら「従属」を解答欄に記入せよ.

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ (2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

解答欄：(1)　　　　(2)　　　　(3)

$\boxed{3}$ (1) 解空間 $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} \subset \mathbb{R}^4$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ に対し,

(a) 1 次独立なベクトルの最大個数 r を求めよ.

(b) r 個の 1 次独立なベクトルを $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$ のうち, 前から順に求め, 他のベクトルをそれらの 1 次結合として表せ.

$\boxed{4}$ (1) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の n 本のベクトル $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ が V の基底であることの定義を述べよ.

(2) $\mathbb{R}[x]_2$ を実数を係数とする 2 次以下の多項式全体のなすベクトル空間とする.

(a) 多項式 $f_1 = 1 + 2x + 3x^2, f_2 = -1 + x + 2x^2, f_3 = 1 - 2x - 4x^2$ が $\mathbb{R}[x]_2$ の基底になることを示せ.

(b) 前問の f_1, f_2, f_3 に対し, 次を満たす実数 a, b, c の値を求めよ.

$$-1 + x - x^2 = af_1 + bf_2 + cf_3$$

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html