

1 次のベクトルの組が, 括弧内のベクトル空間の基底になるかどうか答えよ. (各1点)

$$(1) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (\text{ベクトル空間は } \mathbb{R}^2)$$

$$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \frac{2}{3} \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{rank } A = 1 < 2$ より, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は \mathbb{R}^2 の基底にならない.

$$(2) \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ベクトル空間は } \mathbb{R}^3)$$

$$B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$\text{rank } B = 3$ より, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ は \mathbb{R}^3 の基底になる.

2 \mathbb{R}^3 の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に対し, 線形関係式 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が成

り立つとき, 係数 c_1, c_2, c_3 の値を求めよ. (1点)

解答) c_1, c_2, c_3 の満たす連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を解くと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ -1 & 1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} - \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{1} - \textcircled{3} \\ \textcircled{2} - \textcircled{3} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}.$$

よって, $c_1 = -2, c_2 = -1, c_3 = 4$.