

1

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- (1) 1次独立なベクトルの最大個数 r を求めよ. (1点)
- (2) r 個の1次独立なベクトルを前の方から順に求めよ. (1点)
- (3) 他のベクトルを(2)のベクトルの1次結合で書き表せ. (1点)

解答) $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4 \ \mathbf{a}_5)$ とおき, 階段行列に基本変形する.

$$A \xrightarrow{\substack{\textcircled{2}+\textcircled{1}, \textcircled{3}-\textcircled{1} \\ \textcircled{4}-2\times\textcircled{1}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-\textcircled{2} \\ \textcircled{4}-\textcircled{2}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-\textcircled{3}, \textcircled{2}+\textcircled{3} \\ \textcircled{4}-\textcircled{3}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

最後の行列を $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4 \ \mathbf{b}_5)$ とおくと, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5$ の間の1次関係と $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5$ の間の1次関係は等しい. $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ は1次独立であり, $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_5$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= -\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_5 &= 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4 \end{aligned}$$

と表せる. よって,

- (1) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5$ の1次独立な最大個数は3,
- (2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ は1次独立,
- (3) $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4$