線形代数2, 第6回小テスト解答

2017/10/16 担当：那須

$\boxed{1}$ ２つのベクトルの組 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ と $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ の間の関係が, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_2 = 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ で与えられているとする. (各１点)

(1) 行列を用いて $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ を $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ の１次結合で表せ.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が１次独立のとき, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ が１次独立かどうか判定せよ.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ より, $\operatorname{rank} A = 2$ を得る.

$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ の１次関係式 $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ に対し, 問題 (1) により

$$\mathbf{0} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は１次独立であるので, $A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$. 一方 $\operatorname{rank} A = 2$ より, $c_1 = c_2 = 0$. 従って $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ は１次独立である.

$\boxed{2}$ ２つのベクトルの組 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ と $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ の間の関係が, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3$, $\mathbf{y}_2 = -\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3$, $\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$, で与えられているとする. (各１点)

(1) 行列を用いて $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ を $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ の１次結合で表せ.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ が１次独立のとき, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ が１次独立かどうか判定せよ.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③-①} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③-2\times②} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, $\operatorname{rank} A = 2$ を得る. $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ の１次関係式 $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + c_3\mathbf{y}_3 = \mathbf{0}$ に対し, 問題 (1) により

$$\mathbf{0} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + c_3\mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

一方 $\operatorname{rank} A = 2$ より, 連立方程式 $A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ は, 自明でない解 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を持つ. 従って $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ は１次従属である [1].

ポイント！

ベクトル $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ が, ベクトル $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ の１次結合で表されるとき, すなわち n 次行列 A に対し

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 & \ldots & \mathbf{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} A$$

となるとき, 「$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ が１次独立」$\iff$ 「$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ が１次独立, かつ $\operatorname{rank} A = n$」

[1] $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_3$ の１次独立性の仮定を使わなかったことに注意！

[1] ※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html